澳門数学教育（第二十二期）　2024 年 12 月

目　　錄

澳門基金會　贊助

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號:2877
地址:澳門南灣街 107 號
刊頭題詞:張奠宙教授
排版:廣源紙業文具行
印刷:新文寶印務有限公司
刊號:ISSN 1814-2176

傳承與發展　拓展與創新

澳門數學教育研究學會會長

江春蓮　副教授

自 2022 年底我從汪甄南先生手中接任澳門數學教育研究學會會長一職，白駒過隙，一晃快 2 年了。在此我誠懇地感謝榮譽會長汪甄南先生對學會工作一如既往的大力支持，感謝理事長伍劍佐博士張羅各種大小事宜，感謝副會長伍助志老師、秘書長鄧海棠博士、副理事長劉明藝老師、林松孝老師、施振雄老師、周明老師和各位理事；感謝監事長劉淑華老師、副監事長胡漢賢老師和監事甘偉俊老師；感謝顧問李寶田校長、吳琍玲老師、范進偉副教授和賀彩珍老師為本會所做的工作和指導，向全體成員對本會的信任與支持，致以衷心的感謝！

下面，我將對本會近 2 年的工作和活動做個總結並對 2025 年的工作作些安排和展望。

工作總結

秉著傳承之任，本會繼續做了如下工作：

1）帶領本會會員、澳門數學教師到內地學習參訪，深入了解歷史人文和國情，培養愛國情懷；了解學生學習情況，學習各地辦學理念和教學經驗。

2）與往年一樣，本會繼續與澳門數學奧林匹克學會協辦澳門“金蓮花”杯國際數學邀請賽、“數學大王”國際邀請賽和環亞太杯國際數學邀請賽等面向中小學生的數學競賽活動。

3）出版發行《澳門數學教育》第二十和第二十一期。第二十期刊發了 8 位內師撰寫的 6 篇論文，這些文章介紹了他們在內地優秀的教學經驗、教學理念、教學設計，與澳門數學教師分享。

4）參與澳門教育及青年發展局教學設計公開課的評審工作。

5）參加澳門匯業社會文化促進會舉辦的「匯業杯中學生常識問答比賽」的出題和評委工作。

6）受澳門基金會資助，2024 年 10 月我們邀請了北京師範大學基礎教育品質監測協同創新中心數學監測部主任王立東副教授給本地數學老師和家長作報告，報告主題是“數學補習有用嗎?”，該講座讓學校和家長認識到補習在數學學習中的作用，在是否做出補習安排上做出更明智的決定。

工作展望

2025 年，我們將繼續前兩年的工作，在此基礎上增加一些教研培訓活動，我們擬安排的講座有兩場。

一是邀請香港銅紫荊星章獲得者、北京師範大學教授、前香港大學教育學院教授梁貫成先生作題為"大型跨國教育比較研究結果的應用與誤用"的講座，讓澳門數學教師認識到參與「國際數學與科學趨勢研究」和「國際學生成就評估」的意義，避免錯誤地使用其結果誤導教育的發展。

二是邀請華東師範大學數學科學學院副教授吳穎康老師作題為"核心素養導向下中學統計與概率內容的教與學"的講座，希望能幫助老師避免把概率統計教成了數學。2023 年，澳門第一次參與了「國際數學與科學趨勢研究」中的小學四年級的測試，結果將在 2024 年底頒佈。2025 年，我們也將開展一些關於是次研究的講座，期望給一線的數學教學提供些參考。

參訪回顧

在 2023-2024 年，在澳門中聯辦的大力支持下，本會組織了兩次內地參訪活動，下面簡要回顧一下。

2023 年 12 月 21-25 日，本會會員、澳門數學老師和澳大教育學院學生共 20 人組成"探索海上絲綢之路・閩南文化・參訪交流團"，一起前往廈門和泉州交流參訪。在廈門市，我們參訪了廈門理工學院，獲數學與統計學院楊數雄書記、翟紹輝院長及港澳臺事務科邢怡科長接待，參觀校園並與師生進行了座談。參觀了集美學村的集美學校、歸來堂、陳嘉庚故居等，了解愛國華僑領袖陳嘉庚先生的創業興學經歷，感悟嘉庚精神，厚植愛國情懷。訪問了廈門工學院附屬學校，參觀校園、觀摩數學公開課《數位密碼》並進行教學研討，最後該校同學還將即席創作的書法作品贈與本會。我們還遊覽了鼓浪嶼，參觀了島上的幾處重要歷史建築文物、日光岩、胡裡山炮臺和鄭成功雕像，了解它們在近代史，特別是抗日戰爭中發揮的重要作用。在泉州，我們參觀了泉州輕工職業學院，了解"雙高"教育，特別是該校的造鞋、服裝設計及食品安全檢驗等專業課程的教學實驗室。我們還參觀了泉州海外交通史博物館、開元寺、東塔、西塔、西街、有千年歷史的洛陽橋並觀看了泉州的非遺表演木偶戲。這是疫情以後學會的第一次出行，大家收穫滿滿。

2024 年 7 月 26-30 日，本會會員和澳門數學老師共 20 人組成"澳門數學教師貴州考察團"，在中聯辦教青部張傳偉調研員的帶領下赴黔學習交流，從荔波到平塘、茅臺、遵義，最後回到貴陽，收穫頗豐。26 日在都匀東下高鐵即受到貴州省港澳辦的熱情接待，每人獲贈新鮮玫瑰花一朵，讓人心生歡喜！ 隨後，我們參觀了荔波小七孔景區，乘坐景區大巴參觀臥龍潭、跌水瀑布、布拉雅瀑布等，最後回到清代的小七孔橋。第二天，我們參觀了"時代楷

模”南仁東先生事蹟館，了解他為祖國天文事業做出的巨大貢獻，特別是“中國天眼”的發起和建設過程中做出的貢獻。我們還參觀了天像館和科技館，了解浩瀚的宇宙與航太事業。隨後，我們登上參觀臺俯瞰世界上口徑最大的單天線射電望遠鏡。第三天，我們參觀了茅臺陳列館、1915 廣場和中央紅軍四渡赤水中的三渡渡口鐵索橋。第四天，我們瞻仰遵義會議舊址、遵義會議紀念館、紅軍總政治部舊址等，並觀看大型紅色史詩印記《偉大轉折》劇碼，身臨其境感受硝煙彌漫戰爭的殘酷，領悟長征精神和遵義會議精神。第五天，我們到貴陽市第三中學，與該校數學老師就「立足數學教育，培育科技人才」主題展開交流。該校付鈺校長介紹了他們與澳門培正中學結成姊妹學校、在數學和資訊技術教育等多個層面展開的合作交流項目。作為本會代表，我介紹了本會的工作和取得的成績，強調數學教育在培養學生邏輯思維和創新思維方面的重要性。會上，雙方老師就教學實踐、課程創新等話題進行了熱烈的討論。三中數學教研組長楊先焱、貴州省教科所副所長宋薇老師、澳門培正中學邵敏老師和菜農子弟學校的陳建泰教師等交流了各自的經驗。是次參訪活動，內容豐富，在此以劉淑華老師的詩結束我們的總結：泗水河畔憶長征，茅臺醇酒祭英雄，昔日血肉築河山，千秋萬載處處紅。

傳承致謝

本會將繼續支持澳門特區政府、教育及青年發展局的工作，在教青局的領導下、在澳門中聯辦的大力支持下，組織澳門數學老師積極參與數學教研活動，到內地的參訪活動，為澳門學生數學素養的提升做出我們應有的貢獻。最後，藉此機會衷心感謝澳門特區政府、澳門教育及青年發展局、澳門中聯辦、澳門基金會、澳門各間學校校長、副校長、主任和數學教師，以及來自各地的數學教育同仁一直以來對本會工作的大力支持！

中國一流數學家的科普巨作

——學習華羅庚、王元科普著作選集的體會

首都師範大學數學科學學院

方運加　教授

上海教育出版社隆重推出了《大哉數學之為用:華羅庚科普著作選集》和《大哉言數:王元科普著作選集》兩部數學科普作品,我因為參與了其中的工作,自然有些讀書體會。以下選取我感觸較深的幾點與讀者分享。

1. 中國的現代數學領袖華羅庚

五千年中華文明,起碼在明末清初之前,每個時代都湧現出傑出的數學人物或數學成果,如周公旦、劉徽、楊輝、祖沖之、秦九韶,等等。國家統一、江山社稷、工商百業、生活起居,數學有須臾不離的作用。以古代基層官員為例,若不掌握些數學本領,是幹不好工作的。西元 6 世紀,北周甄鸞著《五曹算經》,“曹”指的是當時行政體系中的科級幹部,“五曹”分別指田曹(田地)、兵曹(兵役)、集曹(貿易)、倉曹(倉庫)、金曹(貨幣)。顧名思義,這是為方便主管各業的基層幹部開展行政工作而編寫的數學應用教科書。當時,世界上只有中國這樣做了。中國古代印刷數學書是國家行為,相關的新產品新技術一經產生,會較快用在印刷數學書上。例如,蔡倫(西元 121 年去世)發明了造紙術,劉徽於西元 263 年注釋《九章算術》就是用紙畫圖的。畢昇於 1051 年前發明了活字印刷術,政府於 1084 年就用此術印刷了《九章算術》等數學著作。相較之,古希臘《幾何原本》的印刷成書是 15 世紀晚期(西元 1482 年)的事情。15 世紀至 20 世紀中期,因各種原因,中國數學整體上落後於世界先進水準。是華羅庚先生扛起現代數學的大旗,改變了中國在近現代數學領域全面落後的狀態,接續了中國數學事業的歷史輝煌(以 1940 年華羅庚的《堆壘素數論》的出版為標誌),中止了斷崖式下降的局面。華羅庚是當之無愧的中國現代數學的領袖,學術上的事例,為人知的、不為人知的數不勝數,正如王元先生所說:華羅庚將尋求中國數學獨立于世界之林視為自己的奮鬥目標……從未放棄過努力。

獲菲爾茲獎與沃爾夫獎的塞爾伯格(A. Selberg)說得很準:很難想像,如果他不曾回中國,中國數學會怎麼樣。

獲菲爾茲獎的著名數學家丘成桐曾評價說,華羅庚在多複變領域的貢獻比西方至少早了 10 年。

另外,華羅庚在回國前曾訪問過馮·諾伊曼領導的世界上第一臺電腦實驗室;回國後,蘇聯數學家柯爾莫哥洛夫曾向他建議中國應該發展計算數學。之後,在華羅庚的努力下,計算數學、電腦發展列入了 1956 年國家制定的《十二年科學技術發展規劃》,這是影響後世的歷史性舉措,今天的我們都是受益者。華羅庚是中國電腦科學事業的開創者,只是很少有人了解實情而已。

在數學研究上、在數學的多領域領銜並取得傑出成果,這樣的人已屬極少,但仍不足稱領袖。能稱為數學領袖的,還應有其他不可或缺的素質或建樹,例如,在數學的普及應用和數學教育上也有帶動全域的影響力。學了《大哉數學之為用:華羅庚科普著作選集》,相信大家會有體會的。網上有爭論"在中國誰的數學成就最大、最高",這種爭論往往是脫離數學實際的。數學領域對於"最""所有的""一切的"這類表述是極為慎重的,不輕易斷言,否則容易產生悖論。談這類事不是小朋友看電影,他們最關心的是誰最厲害。實踐或事實,包括數學家們的看法,都表明華羅庚先生同時也是國際公認的數學教育、數學科普、數學拔尖人才的發現與培養、數學多領域研究團隊的創設、數學應用研究及推廣的大師。

華羅庚是成果豐碩的數學科普大師,這從上海教育出版社出版的這部科普著作選集中可以領略到。不僅如此,華羅庚對中華民族、對中國傳統的數學思想成果有著無比的情懷和熱愛,他在實踐上使中國近現代數學和自然科學與偉大的、曾經居於世界領先地位的中國古代數學建立起聯繫,搭建起思想的橋樑,這對中國人數學觀的影響非常巨大。在華羅庚的思想中,數學是中華文明的主線之一,是不能斷的,是要繼續發揚光大的,他把精力、時間的相當部分用在中小學生的數學教育上,他要通過實踐和努力來說明"數學是我國人民所擅長的學科"。注意!這句話是他在 1951 年 2 月發表於《人民日報》的一篇文章的標題,那時,新中國成立尚不足兩年,正是"一窮二白"的時候。他不是隨便說說的,作為中國的數學領袖,他親自為中學生撰寫科普報告,主要有:1956 年 6 月《從楊輝三角說起》(楊輝是宋代數學家)、1962 年 6 月《從祖沖之的圓周率說起》(祖沖之是東晉數學家)、1963 年 2 月《從孫子的"神奇妙算"說起》(祖沖之和祖暅是《孫子算經》的作者)、1963 年 2 月《數學歸納法》論及元代數學家朱世傑的《四元玉鑒》和 19 世紀數學家李善蘭的恆等式。華羅庚的愛國情懷不是空頭的,是系統而深刻地滲透在數學科普寫作中的。他不單純寫文章,百忙之中更有行動。《從楊輝三角說起》是華羅庚在 1956 年為中國數學會創辦數學競賽所撰寫的。現在有關"數學競賽"的討論很多、詬病不少,我注意到所有的討論都與"數學競賽"的本質、與數學的本質無關,客觀上損害了"數學競賽"這一對培養青少年科學素養或綜合素質極為必要的數學教育形式。

華羅庚的女兒華蘇在一篇回憶文章中提到,數學競賽活動曾被當作培養修正主義的苗子而遭到批判。但華羅庚認為,數學競賽的深遠意義是難以估計的。華羅庚在主持這項工作中沒有任何功利主義,親力親為地參與了做報告、出題、改卷的每一個環節。他的目標是

讓中學生喜歡數學和發現數學人才。

在中國數學科學領域,華羅庚是做了頂天立地的工作的,我們今天要感這個恩、要學習他的思想、要挖掘他的思想寶庫並惠澤後代。另外,華老的人品沒得挑!1969 年 2 月,老數學教育家熊慶來受動亂摧殘不幸去世,華老得知此消息時,熊老已被運至火葬場,他急忙趕去翻遍蓋屍布,最終找到熊老,見了最後一面。熊慶來於華羅庚有知遇之恩,1931 年把他從僻埌之地一步提到了清華大學,只因他在當時國內的《科學》期刊上發表了一篇數學論文(1929 年 12 月)。眾所周知,華羅庚的學歷僅是初中。熊慶來這一"不拘一格降人才"之舉,世所罕見,震撼學界,為中國現代數學事業立了大功。

2. 認真學習華羅庚的科普著作

最近,中小學數學教育提倡數學建模素養、提倡中國數學史教育,同時對教師提出了提高專業素養的要求。數學教師的確應該熟悉專業知識,掌握數學思想、數學方法。這不妨先從學習華羅庚的文章做起。他講解數學知識是集中了古今中外的各種數學先進思想來普及數學思考方法的,了解了他的想法,你的起點就不一般了。現在的一些數學教研文章說教味濃,詞多,但可以明確的概念少之又少,主觀臆造、主題空洞,看似正確實則無法落實的漂亮話太多。看看華羅庚的文章,學習他對數學思想和方法的認識,會極有收穫,這是通常的教科書所無法比擬的。教科書的陳述往往是僵化的,華羅庚的文章則是活的,充分體現了對問題研究的全過程。數學教師專業進修,他的這本書可以開一門課。

總之,沒有讀過華老經典科普作品的數學教師,不會是最好的數學教師;讀了華老作品的學生,會是有底氣和教師交流的好學生。

數學建模正在被大張旗鼓地提倡或要求,但有許多數學教師對此的認識仍處於混沌狀態。大家不妨仔細閱讀學習《從祖沖之的圓周率談起》,這是中學數學建模教學的光輝範例。可惜,我很少見到哪位中學數學教師研讀過這篇文章。

另外,對於中學數學和大學數學的區別,很多數學教師不一定清楚,建議大家認真學習《有限與無窮,離散與連續》(1963 年 1 月)這篇文章。讀了,就知道自己在幹什麼了。當然,不清楚這個區別不是因為水準不高,很可能是沒有主動從整體上認識初等數學和高等數學的區別與聯繫,也沒有從這個視角來考慮中學數學教學問題。中學數學教師應該組織學生學習這些文章,可以採用講座的形式,也可以指導學生自主閱讀,真正經歷並體會華羅庚的數學思考、華羅庚的數學思想、華羅庚的數學研究方法。數學科學的大人物為中小學生寫自己的研究體會和認識,華羅庚是第一人。

3. 學習王元科普著作選集的一點體會

我與王元先生相識于 1989 年末,當時他作為中國數學會理事長,正領導籌備將於 1990 年在中國北京舉行的第 31 屆國際數學奧林匹克。這項工作面臨的困難是巨大的,當時國

際大環境很惡劣,制裁、抵制之聲甚囂塵上。在王元先生的領導下,也憑藉他在國際數學界的影響力以及耐心的工作,屆時居然有 56 個國家和地區參加了這次活動,是歷史上參加國和地區最多的一屆。如果不是國家的努力和王元這樣的國際一流數學家的影響力,取得這樣的結果是難以想像的。

王元先生是華羅庚學術團隊的主要成員。在我們國家率先取得數學甚至整個科學領域的世界冠軍性成果的,是他於 1957 年證明了哥德巴赫猜想的"2+3";之後,1960 年潘承洞證明了"1+4",1965 年陳景潤證明了"1+2"(1966 年發表)。我們都知道徐遲寫的《哥德巴赫猜想》這篇報告文學,大家都愛看。但徐遲屬於外行,看的是熱鬧,寫得也熱鬧,若要看門道,還是看王元先生的這本書好。這本書講述了圍繞"哥德巴赫猜想"的證明之路,所產生的思想、方法、困難以及機遇,是數學教育的光輝範例,非常提氣。王元先生是用平淡、平和、自謙的筆調寫作的,其中提到山東大學的潘承洞在與他討論有關哥德巴赫猜想證明的問題時,同期給王元寫了 60 封信,而僅給自己的未婚妻寫過 2 封信。

王元書中有篇文章《解析數論在中國》,這個領域的中國開創者和領導者是華羅庚;之後的第二代代表人物是王元、潘承洞、陳景潤;第三代是張益唐(取得孿生素數猜想證明的突破性成果),他是在"十年動亂"中讀的中學,那時就自學了華羅庚的《從孫子的"神奇妙算"談起》;第四代以張壽武、田野為代表。王元先生告訴我,現在已經有了工作極為出色的二十多歲的年輕人,應該算是第五代。中國解析數論學派人丁興旺,成果豐碩,陳景潤證明的"1+2"仍是證明猜想的最好結果,半個多世紀了,無人超越。在眾多數學領域中,我國的解析數論是較為領先的。

華羅庚的團隊成員普遍重視並力行實踐數學科普,在組織、宣傳、實施各種數學科普活動上做了大量持續性的工作,這是人人皆知的。王元先生在擔任中國數學會理事長期間,力行推動數學科普工作。他主張自主學習,而他本人就是榜樣。從書中可以看到,他是華羅庚學術團隊的成員,但他的工作是自主的,華羅庚讓他搞數論,改變了他原來想搞泛函分析的念頭,僅此而已,之後就由他自己幹了。陳景潤、潘承洞也都是這樣。

他們還有個共同特點,都是"土包子",是在中國大地上土生土長的數學家。他們的成長學習都是非常有特點的,王元先生曾說,後悔中學時代沒有刻苦用功,從而未能考取一所理想的大學。他考上的英士大學位於浙江金華,於 1949 年解散了,師生被併入了浙江大學。大學四年級時王元參加了陳建功、蘇步青指導下的本科生學術討論班,在這個討論班中,他曾在教師的指導下報告過莫格姆的名著《素數分佈》和幾篇拓撲學文章。這個經歷無疑大大提高了王元的自學能力。他以優異成績畢業於浙江大學,被分配到中國科學院數學所後又參加了華羅庚組織的討論班。這裡的學習絕不止于讀現成的書,華羅庚是用寫一本書的辦法來引導學生學習的。王元參與了《數論導引》討論班,這本書於 1956 年由科學出版社出版。

總之,王元先生的書客觀描述了我國 1949 年以後的數學科研狀況。張益唐在孿生素數猜想上作出突破性工作之後,是在王元先生的堅持和努力下,克服了一些曲折,促成了回

國講學。之後的情況大家都知道了,張益唐參與中國數學科學的發展已經成了一件很自然的事情。王元為了讓公眾了解張益唐的工作,專門撰寫了《孿生素數猜想》一文。

元老(數學界對王元先生的稱呼)的貢獻還有許多,我會擇機再敘的。

註:

本文作者參與了《大哉數學之為用:華羅庚科普著作選集》《大哉言數:王元科普著作選集》兩書的策劃,本文系作者于2019年8月15日在2019上海書展所作的公眾報告,發表時有所增刪,標題為編者所加。

共同打開一扇“門”

——澳門數學教育研究會代表訪校

福建省廈門市　廈門工學院附屬學校

網頁發布文章

藍天和碧海,濠江和鷺江,讓時空交匯、教學交融,共同打開一扇門,發出從容生長的力量。

廈門、澳門,兩顆鑲嵌在“海上絲綢之路”上的璀璨明珠,自古以來就聯繫密切。2023年12月22日,澳門數學教育研究學會江春蓮會長一行20人蒞臨我校參觀,互相交流兩地數學教學改革的做法。

澳門數學教育研究學會,澳門非盈利學術機構,學會會員來自澳門各中小學校領導、教師以及澳門大學教育學院、澳門城市大學教育學院教授等。以研究澳門非高等教育階段數學教育為宗旨,團結澳門數學教育界人士,以現代數學教育思想為指引,結合學校數學教學實際,積極推動澳門中小學教育階段的數學教育改革,以培養澳門學生的數學能力和愛國愛澳的適應社會發展的人才為目標。

總校長助理陸海萍老師向來賓們介紹了廈門工學院附屬學校開辦以來堅持“立德樹人,以文化人”,實施“品學力行,從容生長”的辦學情況及辦學業績,特別介紹了學校圍繞國

家新頒佈的課程方案和數學新課標開展數學教學改革與研究的做法。

來賓們對我校辦學條件、辦學成果給予高度讚揚。江會長認為：我校校園環境優美，充滿活力。無論是在校園文化還是課程建設方面別具一格。

澳門數學教育研究學會的諸位老師觀摩由我校潘淩燕老師開設的小學數學課《數位編碼》。課上，潘老師巧妙地設置了小偵探追捕嫌疑人的情境，將身份證號碼與郵遞區號兩個教學重點串聯起來。學生通過自主探究、小組討論、合作交流，體會到了數位編碼的魅力，並且通過設計學號編碼的活動，使學生進行了知識的遷移與應用，眞正做到樂學、趣學、學會。

課堂結束後，我校同澳門數學教育研究學會的老師們在行政樓一樓會議室進行評課，把交流活動推上高潮。

雙方先是互相簡單介紹了各自基本情況，然後分享自己的觀課體會。大家在融洽的氛圍中暢所欲言，獲益匪淺。

潘淩燕老師說課

《數位編碼》屬於數學“綜合與實踐”領域的探究課。本節課我結合創設的情境,引導學生了解各種數位編碼的特點,通過觀察、比較、猜測數位編碼的具體含義,發展學生的推理能力。在嘗試用編碼解決生活中的簡單問題的過程中,增加應用意識,提高實踐能力。

江春蓮會長(澳門大學教育學院副教授)評課

潘老師的課堂中,學生的學習狀態非常飽滿,學生積極參與課堂,參與度高,學生素質高,能夠學以致用。潘老師的板書設計非常精妙,教態具有親和力、感染力。

鄧海棠秘書長(澳門聖若瑟教區中學第六校)評課

潘老師的課堂設計充分體現出數學來源於生活又高於生活,課堂教學回歸生活並且為生活服務。建議潘老師還可以嘗試示錯教學法,給予學生一個疑似正確的答案,讓學生深入思考,進行糾錯,昇華課堂。

董淑珍老師(澳門勞校中學)評課

潘老師這節課上得比較從容。在這一節課裡其實內容容量非常大,但潘老師始終寓教於樂,學生活動有個人的參與活動,也有小組探究活動,方式方法多樣,而且將語文教科書也設計進活動中,非常有趣。在課堂結尾潘老師還展示了港澳臺的車牌,體現數位編碼的多樣性,非常有心。

評課結束後,我校教師與澳門客人進行互動分享,就教材使用、考試制度等方面的情況進行了交流。

據澳門客人介紹,在澳門,學校有權自主決定使用什麼教材,大部分學校選擇人教版數學教材,也有部分學校使用香港或者澳門的自編教材。澳門的大學有聯合招生考試,但是中學階段沒有統一的考試制度,由各個學校自行考核。

當了解到澳門大部分學校選用人教版數學教材時,大家感到未來我們有更好的交流、合作、研究的基礎,可以共同為祖國的數學教育事業盡一份自己的力量。

澳門數學教育研究學會同行歡迎我校在方便的時候到澳門交流訪問。我校愉快地接受了邀請。

會後,小學部鄒璧君、餘明坤同學現場書法展示,並將作品贈送給澳門數學教育研究學會的老師們。

交流是學術不斷創新的階梯。此次交流活動在加強教科研、學術交流和國際化人才培養等多個方面展開了深入的對話和探討。雙方一致表示,今後將不斷拓寬交流管道,深化合作內涵,共同為提升教育品質、培養更多優秀的國際化人才而努力,攜手共進,共創美好未來。

厦门工学院附属学校简介：

廈門工學院附屬學校是以學生全面發展爲核心的非營利性全日制寄宿學校(教民135020030000010),學校實行董事會領導下的校長負責制,以高起點設計、高標準建設、高質量辦學爲宗旨,秉持“百年樹全人,百年立名校”的願景,以發展教育事業、復興中華民族爲已任,創一流的現代化學校,辦人民滿意的好教育。

廈門工學院附屬學校坐落在美麗的集美區,毗鄰廈門工學院,環境静美典雅,布局溫馨舒適,兼具濃鬱的傳統韵味和現代氣息。校舍建築面積5萬平方米,設有幼兒園、小學部、初中部、高中部(含國際方向),設有食堂、宿舍、實驗室、運動場語音學習系統、計算機中心、多媒體智能化教室、體音美勞功能教室和現代化圖書館、機器人教室等。

廈門工學院附屬學校奉行“立德樹人、以文化人”的教育理念,以“品學力行”爲校訓,踐行“真、善、美”的教育思想,以優質教育爲學生的終身學習與發展奠定基礎。學校由知名校長引領,教師來自五湖四海,他們熱愛教育、愛生如子、學識淵博、敬業篤學,組成了高、精、尖的師資隊伍和管理團隊。

資料來源：

共同打開一扇“門”||澳門數學教育研究會代表訪校. 廈門工學院附屬學校. http://fsxx.xit.edu.cn/Print.aspx?id=2379

相約築城　共話發展！

——澳門數學教育研究學會來築考察

貴州省貴陽市教育融媒體中心

7 月 30 日，澳門數學教育研究學會數學教師代表國情考察團一行來到貴陽市第三中學，以“立足數學教育，培育科技人才”為主題展開了交流座談，共話數學創新人才培養，探討數學教育的新路徑、新方法。

▲座談會現場

澳門中聯辦教青部四級調研員張傳偉，市教科所黨總支委員、副所長宋薇，以及貴州省教育廳港澳臺辦、市教育局相關處室、澳門廣大中學、貴陽市第三中學等有關同志參加。

▲雙方互贈紀念品

座談會上，與會嘉賓圍繞黨的二十屆三中全會關於教育科技人才的相關內容進行了深入探討。澳門教師代表還從數學學科發展、人才培養等方面作了經驗分享。最後，貴澳雙方參會代表表示，期待今後能進一步加強交流合作，共同推動兩地在教育領域的合作與發展。

▲合影留念

據悉，此次講座是澳門數學教育研究學會數學教師代表國情考察團赴貴州考察的最後一站。此前，考察團一行還通過專題報告、實地參訪、交流座談等方式，走進貴州平塘縣中國天眼科普基地、南仁東先生事蹟館、平塘縣天空之橋服務區等地，詳細了解黔城的歷史文化以及數學教學研究情況，進一步深化內地與澳門教育界的交流合作，促進澳門教育界人士對國家發展大局和內地教育發展新趨勢的深入了解。

▲考察現場

考察團成員表示,貴州近年來的發展成就令人矚目,此次來黔參觀感受到貴州人民的滿滿熱情,同時也感受到貴州科技創新和數學教育上的斐然成績。期待雙方能加強交流往來,在文化、教育等領域開展務實合作,實現協同發展、互利共贏。

資料來源:

貴陽市教育科學研究所. 發佈日期:2024-07-31 16:09:09 https://www.gysjks.cn/pages/web/2024/07/31/14e4686ada974011a249d6cab63e7097.html

建立多重聯繫，促進學生的數學理解

—— 從《直線的傾科角和斜率》一課說起

澳門大學教育學院副教授　江春蓮

澳門廣大中學教師　吳言偉，李錦健，何漢秋

【評論】(江春蓮)

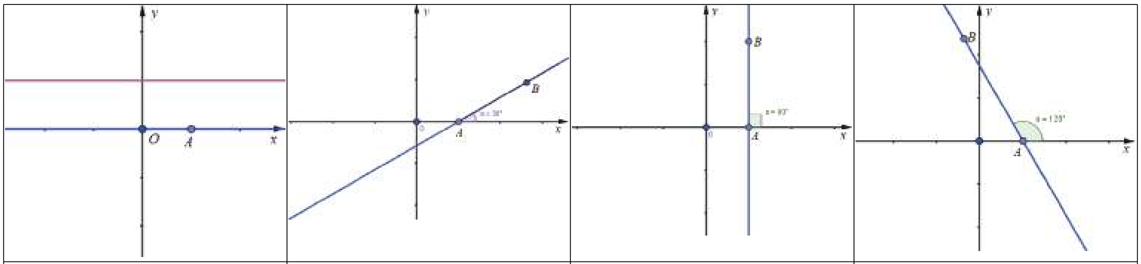
2022 年 10 月 19 日，澳門大學教育學院數學教育專業的大三學生在澳門廣大中學進行了見習活動，期間吳言偉老師就《解析幾何》中的課題《直線的傾科角和斜率》在高二文科班進行了示範課教學，隨後該校數學組老師和見習學生就教學活動的設計進行了研討。下面我們將先完整呈現這節課的教學流程，接著就其教學設計作些講評與反思，希望能給一線數學老師帶來一些啟迪，特別是數學教學設計原理方面的啟迪。

【教學設計】(吳言偉)

這節課的教學目的有三：(一) 讓學生理解傾斜角的概念；(二) 理解傾斜角 α 和斜率 k 之間的關係：$k = tan\alpha$；(三) 能解決兩種類型的問題：(a) 根據傾斜角求直線的斜率；(b) 根據斜率求傾斜角。這節課是《直線的方程》的開首篇，落腳點是確定直線的第二種方法：給定點和斜率(或傾斜角)，對應的是直線的點斜式和截距式，其中截距式是點斜式的特例。

活動 1：過 x 軸上的點 A 作兩條直線，通過對這兩條直線的比較(它們的方向／傾斜度不同) 引出傾斜角的概念。在教材[1] 的第 36 頁，傾斜角的定義是：對於一條與 x 軸相交的直線，如果把 x 軸繞著交點按逆時針方向旋轉到和直線重合時所轉的最小正角記為 α，那麼 α 就叫做直線的傾斜角。

接著，以如下四個重要的圖形來呈現不同大小的傾斜角及其所對應的直線的狀態，由此得出傾斜角的範圍：$0° \leq \alpha < 180°$. 此處可以用動態幾何軟體動態呈現。

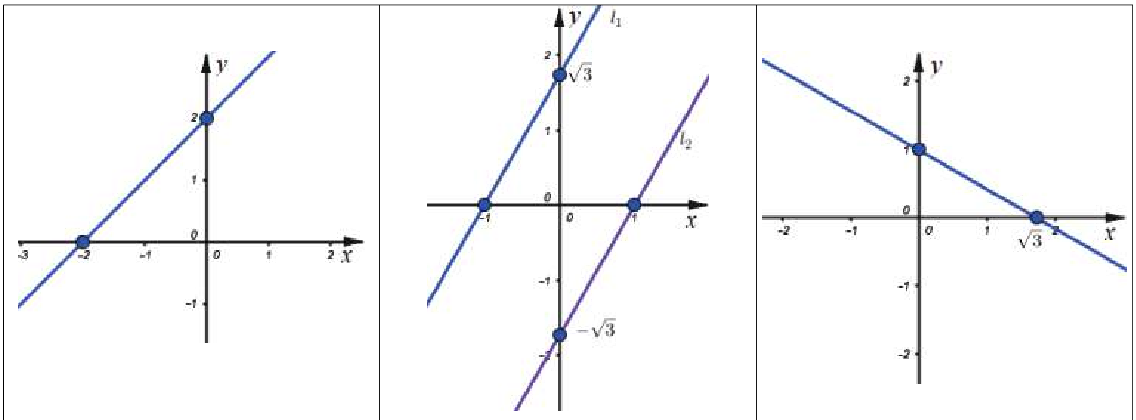


$\alpha = 0°$	$0° < \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha < 180°$
$k = 0$	$k > 0$	k 不存在	$k < 0$

圖 1. 過點 A 的、傾斜角不同的直線

活動 2:求某些特殊的直線的傾斜角,並建立直線的傾斜角與斜率之間的關係。此處通過如下問題的解決進行:

畫出下列圖形中各直線的傾斜角,並求出它們的度數。



$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 150°$

圖 2. 畫出各題中直線的傾斜角,並求出它們的度數

這裡,有個學生根據傾斜角的定義,將第二個圖中的傾斜角標成了它的對頂角。由此可見,根據教材的定義描述,得到的傾斜角並不唯一。

在這三個問題中,要確定傾斜角的大小,我們都可以求出其對應的正切值,所以可將傾斜角的正切值定義為直線的斜率 k:$k = tan\alpha$,進而完善圖 1 中表格的最後一行。

活動 3. 典型例題

例 1. 已知直線的傾斜角,求其斜率。

(1)$\alpha = 0°$　(2)$\alpha = 60°$　(3)$\alpha = 120°$　(4)$\alpha = 90°$

例 2. 已知直線的斜率,求其傾斜角。

(1)$k = 0$　(2)$k = -1$　(3)$k = \frac{\sqrt{3}}{3}$　(4)$k = \sqrt{3}$

活動 4. 小結[此處小結本節課學習的主要內容:傾斜角,斜率及其之間的關係]

活動 5. 課堂評量及佈置作業[佈置作業部分略]

讓同學取出手機,在線上平臺 *teams* 上回答如下的五道選擇題:

1. 一條與 x 軸相交的直線,如果把 x 軸繞著交點按 ______ 到和直線重合時所轉的最小正角記為 α,那麼 α 就叫做直線的傾斜角。

   (A) 順時針旋轉 (B) 逆時針旋轉

2. 傾斜角的範圍是 ______。

   (A) $0° < \alpha < 90°$ (B) $0° \leq \alpha < 180°$ (C) $0° \leq \alpha < 360°$

3. 已知直線的斜率 $k = -2$,那麼這條直線的傾斜角是 ______。

   (A) 銳角 (B) 直角 (C) 鈍角

4. 若一直線的傾斜角是 $60°$,那麼這條直線的斜率 $k =$ ______。

   (A) $sin60°$ (B) $cos60°$ (C) $tan60°$ (D) $cot60°$

5. 下列各個傾斜角中,斜率不存在的是 ______。

   (A) $0°$ (B) $45°$ (C) $90°$ (D) $135°$

【點評】

教學反思[吳言偉]:

這部分教材的安排是:

(a) 直線與方程,在回顧初中一次函數圖像的基礎上,就一次函數的方程的解和直線上的點之間的一一對應關係,給出直線的方程和方程的直線的定義;

(b) 給出直線的傾斜角的定義,並用兩個圖形說明傾斜角可以為銳角和鈍角,進而得出傾斜角的範圍 $0° \leq \alpha < 180°$;

(c) 給出直線的斜率的定義:傾斜角的正切值 $k = tan\alpha$;

(d) 推導過兩點的直線的斜率的計算公式 $tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

(e) 兩個例題,一個是求垂直於傾斜角為 $30°$ 的直線的直線的斜率,一個是求過兩點 $A(-2,0)$、$B(-5,3)$ 的直線的斜率。

教材在(b) 和(c) 部分的節奏比較快,所以有意識地補充了兩個教學活動,以幫助學生理解引入傾斜角概念的必要性,明確斜率 $k = tan\alpha$ 定義的合理性。

講評 1[李錦健]:

這是節概念課,內容不多,常被認為很簡單,但要講清楚,卻有一定的難度。

首先,課堂上,吳老師讓學生到白板前畫直線的傾斜角時,特意給了一把尺子,讓學生按照傾斜角的定義轉動直尺,這樣的要求可以有效幫助學生理解傾斜角的概念,形象直觀,

值得借鑒。

其次,當吳老師在引導學生對傾斜角大小進行分類時,學生的反應並不熱烈,很可能是因為文科學生忘記了角可以按大小分為銳角、直角和鈍角,因此建議在講解新課前複習一下角的分類知識。數學科的學習,新舊知識間的聯繫非常緊密,教師備課時需檢查學生前置知識的掌握情況,並在設計新課時為學生作簡要複習,使新課的講解更為順暢。以這節課為例,可以先複習初中學過的銳角、直角、平角、周角等概念及對應的度數的取值範圍。教師如能在每次備課時考慮周全,教學效能定能有所提升。

第三,在教學中,我經常發現文科同學對數學概念的“敏感度” 不夠,例如傾斜角的定義“對於一條$\boxed{\text{與 } x \text{ 軸相交}}$的直線,如果把 x 軸繞著交點按$\boxed{\text{逆時針}}$方向旋轉到和直線重合時所轉的$\boxed{\text{最小正角}}$記為 α,那麼 α 就叫做直線的傾斜角” 中,方格中的關鍵字非常重要,不重點強調的話就容易被學生忽略。因此,教學時,教師可帶領學生劃記,不僅找到這裡傾斜角定義中的關鍵字,也能在日後的概念學習中這麼做,加深對概念的理解。

第四,學生可能會有疑問,既然用傾斜角已經可以很好地表達出直線傾斜的程度,為甚麼還要引入斜率 $k = tan\alpha$ 呢? 我認為其中一個最重要的原因是:解析幾何是借助坐標系,將幾何問題代數化,使用代數方法解決幾何問題的數學分支。傾斜角雖能直觀地表示直線的傾斜程度,確定直線的位置,但卻難以用於實際計算之中,因此需要利用正切函數將傾斜角轉化為更適合計算的斜率值,體現了數形結合的思想,既形象直觀,也兼具可運算性,實現幾何問題代數化。斜率的概念,在後續直線的學習(直線方程、直線的位置關係、兩直線的夾角等內容的學習)中扮演著至關重要的作用,在直線與圓和圓錐曲線中也都需要用到,所以這節課中,一個重點是讓學生充分理解斜率與傾斜角的關係。

最後吳老師利用 *teams* 平臺為學生進行隨堂檢測,能即時檢視學生的課堂學習成效,發現學生未掌握的內容,並及時糾正,課堂效率得到提升。現今的教學非常重視課堂效率,這種利用資訊科技配合堂測的方法已經很普遍,也是教師必備的教學能力之一。

講評 2[何漢秋]:

舊教材[3] 第 14 頁上傾斜角的定義是:一條直線 l 向上的方向與 x 軸的正方向所成的最小正角叫做這條直線的傾斜角。這樣的定義可以使平面上任何一條直線都有唯一的傾斜角。

現用教材[1] 上的定義,則會出現互為對頂角的兩個角都是傾斜角的情況。如果將現教材傾斜角的定義改成:對於一條與 x 軸相交的直線,如果把 x 軸從交點出發的“正” 方向繞著交點按逆時針方向旋轉到和直線重合時所轉的最小正角記為 α,那麼 α 就叫做直線的傾斜角。這樣就避免了教材[1] 中傾斜角不唯一的問題。

由此可見,舊定義比新定義更簡潔。定義的選擇對學生的理解很重要,現教材上的定義可能會引起誤解。

講評 3[江春蓮]:

我們曾撰文討論過這節課的設計[2],我們在前面設計的內容是過一點一般可作兩條直線與 x 軸成給定的角度,為區分這兩條直線,可定義成 x 軸正向與直線 l 向上方向之間所成的角,這樣兩條直線與 x 軸所成的角就不相等了。接著,可討論過兩點的直線的傾斜角的正切值的表示:$tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,最後類比"坡度" 的定義給出直線斜率的定義。這樣建構的課堂連貫性稍微強一點。

我們也可以從"為什麼一次函數的圖像是直線" 引入這節課。為回答這個問題,我們可以證明,滿足 $y = kx + b$ 的任意三個點 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$ 三點共線,即證明 P_1P_2、P_1P_3 與 $y = y_1$ 成等角。因為三點的座標均滿足方程,所以有 $\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \\ y_3 = kx_3 + b \end{cases}$,其中的第 2 式減第 1 式,可推得 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。類似地,第 3 式減第 1 式,可推得 $k = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$,它們分別是圖 3 中的 $\angle AP_1P_2$ 和 $\angle BP_1P_3$ 角的正切值。其中 A 和 B 是過 P_1 垂直於 y 軸的直線分別與過 P_2、P_3 垂直於 x 軸的直線的交點。所以 $\angle AP_1P_2 = \angle BP_1P_3$,因為 P_1、A、B 三點共線,所以 P_1、P_2、P_3 三點共線,且 $k = tan\angle AP_1P_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,即斜率 k 等於 $\angle AP_1P_2$ 的正切值。所以,一次函數也可以由 b 和 $\angle AP_1P_2$ 確定,我們給 $\angle AP_1P_2$ 一個名稱:直線的傾斜角! 這樣的引入雖說有一定的難度,但其在回答了一次函數的圖像為什麼是直線的基礎上,引入新的概念,把新舊知識完整地關聯到了一起!

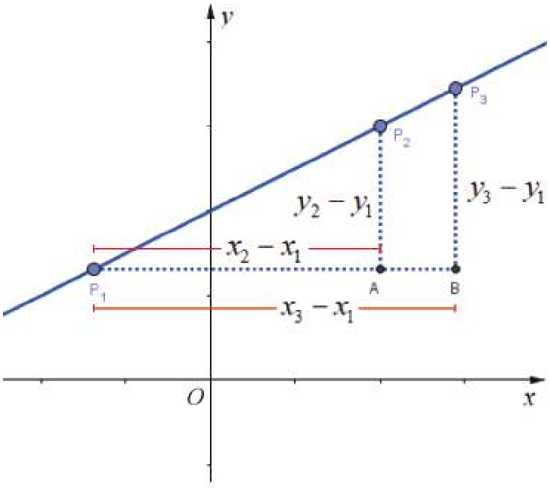


圖 3　一次函數圖像上的點

除垂直於 x 軸、y 軸的直線無法用一次函數的方程 $y = kx + b(k \neq 0)$ 表示外,其餘的均可,所以所有一次函數圖像對應的直線都有傾斜角,$k > 0$ 時傾斜角為銳角,$k < 0$ 時傾斜角為鈍角,反之亦然。而垂直於 x 軸、y 軸的直線的傾斜角分別為 90° 和 0°。

幫助學生在先前學過知識的基礎上建構新的知識,是教學的主要目的,但如何去做,需要教師對教材的再加工,吳老師的教學設計充實、豐富了教材的內容,讓教育學院的大三學子受益匪淺。基於問題"為什麼一次函數的圖像是直線" 的討論,不僅可以建立新舊知識之間更緊密的聯繫,斜率定義為傾斜角的正切也顯得更為自然,也無需再單獨推導過兩點的直線的斜率公式。

參考文獻:

[1] 人民教育出版社中學數學室(編)(2006). 全日制普通高級中學教科書(必修) 數學 第二冊(上). 北京:人民教育出版社.

[2] 江春蓮, 汪甄南(2011). 高一直線的傾斜角和斜率一節的教學設計. 中學數學,383,17.

[3] 人民教育出版社中學數學室(編)(1990). 高級中學課本平面解析幾何全一冊(必修). 北京:人民教育出版社.

澳門四校聯考攻略 —— 考綱 5 之題析

澳門聖若瑟教區中學第六校

鄧海棠

隨著每年 9 月份本地的聖若瑟大學、澳門大學招收大學保送生開始,就揭開了澳門升大季節的序幕,到 10 月份的理工大學、旅遊學院、鏡湖護理學院、澳門科技大學,再到 11 月份的內地高校、暨南大學、華僑大學,而臺灣的高等院校中的臺大、臺師大、臺科大更是在 8 月直到 10 月長達兩個月的跨度對澳門的中六(高三)學生伸出著橄欖枝。

保送之後的環節,不論成敗,就是實打實的聯合招生考試。時至今日,澳門的四校聯考成績不但可以用於本地大學的升學參考,還能作為內地十多所重點高等院校的入學成績參照,更可成為升讀臺灣高等院校的敲門磚。

只是,澳門的數學聯考,一直是大多澳門學子心中的痛。此時,我不由而然的想起了 1988 年電影《旺角卡門》的插曲、王杰和葉歡在 1988 年演唱的一首國語歌曲《你是我胸口永遠的痛》,粵語版則爲《溫柔的你》。眞是有點諷刺,"溫柔的你"是"我胸口永遠的痛"。為了不痛,就要痛定思痛,找根源,尋方法,覓出路,勤思考,苦鉆研,學技能。

澳門四高校聯合入學考試(數學科)考試大綱 5 考查的內容要求是:二次方程及二次函數:一元二次方程的解與判別式的關係,二次公式;根與係數的關係;二次函數的極值 - 配方法的應用。

自 2016 年到 2022 年相關知識點的考試題型題目序號分佈如下:

	選擇題題目題號	解答題題目題號	<u>附加卷</u>題目題號
2016 年<u>模擬卷</u>	6. 一元二次方程根與系數的關係。	1. 二次函數的交點,面積,坐標。	
2017 年正卷眞題	8. 用配方法求二次函數的極值。		
2018 年正卷眞題	3. 一元二次方程根與系數的關係。	3. (a) ~ (c) 二次函數的交點,面積,坐標。	
2019 年正卷眞題	12. 以某一元二次方程的兩個根的平方為根的一元二次方程。	3. 求板身為長方形而頂部為半圓形的石板最大可能面積。	

2020 年正卷真題			3.（a）構造以直線與圓的交點橫坐標為根的一元二次方程。（b）（i）（ii）（iii）韋達定理表達等式的證明。
2021 年正卷真題	5. 用一元二次方程求另外的一元二次方程。	3. 一元二次方程式子證明,求值。	
2022 年正卷真題	5. 方程有實根,求字母參數的取值。12. 韋達定理與算術平均數。	1. 二次函數解析式,圖象平移,函數最值。	

從上表中可以看到,考試大綱5考查的內容大都以選擇題的形式進行,也有不少以解答題的形式出現,而在2020年的附加卷中也有涉及。

相對應的知・識・點、習題・鞏固・評估、習題・鞏固・評估・解答、四校・真題・解答分別如下。

一、知・識・點

一、一元二次方程

1、一元二次方程的解與判別式的關係

一元二次方程的一般形式為:$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,判別式 $\triangle=b^2-4ac$,

當 $\triangle>0$ 時,其根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}$,即 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,是一對相異的實數根。

當 $\triangle=0$ 時,其根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}$,即 $x_1=\dfrac{-b+0}{2a}$,$x_2=\dfrac{-b-0}{2a}$,是一對相等的實數根。

當 $\triangle<0$ 時,方程沒有實數根。

2、二次公式

對於 $a\neq 0$,$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}=a(x-x_1)(x-x_2)$,

其中 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的兩個實根。

3、根與係數的關係(韋達定理)

由求根公式得兩根(數)之和 $x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$;

及兩根(數)之積 $x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\triangle})^2}{(2a)^2}=\frac{b^2-\triangle}{4a^2}=$ $\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$

即 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ 及 $x_1x_2=\frac{c}{a}$,

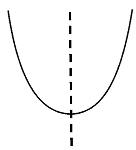
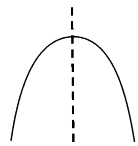
這一組式子體現了一元二次方程的根 x_1,x_2 與係數 a,b,c 的數量關係,人們稱之為韋達定理。

一元二次方程根與係數的關係往往會結合平方差公式,完全平方和(差)公式,立方和(差)公式,完全立方和(差)公式來進行考核。

二、二次函數

1、定義:形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的函數叫做二次函數,它的圖像是拋物線。

2、二次函數的性質:

函數形式	對稱軸	頂點坐標	$a>0$ 	$a<0$ 
$y=a(x-h)^2+k$ $(a\neq 0)$	$x=h$	(h,k)	1. 拋物線開口向上; 2. 頂點是拋物線的最低點,函數有最小值; 3. 在對稱軸的左邊,y 隨 x 的增大而減小,在對稱軸的右邊,y 隨 x 的增大而增大。	1. 拋物線開口向____; 2. 頂點是拋物線的最____點,函數有最____值; 3. 在對稱軸的左邊,y 隨 x 的增大而____,在對稱軸的右邊,y 隨 x 的增大而____。
$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$	$x=-\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$		

3、拋物線與坐標軸交點情況:

如果拋物線 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 與 x 軸有公共點,

那麼公共點的橫坐標是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解。

方程的判別式	$\triangle>0$	$\triangle=0$	$\triangle<0$
方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的情況	有兩個不等實數根	有兩個相等實數根	沒有實數根
拋物線 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 與 x 軸公共點個數	2 個	1 個	0 個

拋物線 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 與 y 軸交點坐標是$(0,c)$。

4、配方法

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 求根公式	二次函數 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 求最值
$ax^2+bx+c=0$, $ax^2+bx=-c$,(常數移項) $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$,(二次項係數化為 1) $x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}=-\frac{c}{a}$, $x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$,(兩邊同加) $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,(完全平方公式) $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;(求根公式)	$y=ax^2+bx+c=(ax^2+bx)+c$, $=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}\right)+c$, $=a\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$, $=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$, $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c$, $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}$, $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$; 當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時,函數有最值$\frac{4ac-b^2}{4a}=c-\frac{b^2}{4a}$;

二、習題・鞏固・評估

1. 設方程 $x^2-6x+3=0$ 的兩個根為 α,β,求下列各式的值。

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$;

(2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$;

(3) $(\alpha-\beta)^2$;

(4) $(\alpha-3)(\beta-3)$;

(5) $\alpha^3+\beta^3$。

2. 設 $f(x)=x^2-8x$ 及 $g(x)=x^2+4x-7$,求 $f(x)+g(x)$ 的最小值。

3. 函數 $y=x^2+bx+c$ 的圖象與 y 軸相交於點 $C(0,10)$,並與 x 軸相交於點 $A(2,0)$ 和點 B. 求 b 和 c 的值和點 B 的坐標。

4. 設二次函數 $f(x)$ 的最大值 $f(-3)=7$,且其圖象經過點 $P(-5,4)$,求 $f(x)$ 的解析式。

5. 若 $2x+y=3$,求 x^2+y^2 的最小值。

6. (1) 已知拋物線 $y=ax^2-6x+3$ 與 x 軸有交點,求 a 的取值範圍。

(2) 拋物線 $y=-x^2+9$ 與 x 軸的交點座標是 ______,與軸的交點座標是 ______。

7. 用長為 60 的繩子圍成一個矩形,設矩形的一邊為 x,則矩形另一邊為 ________;

矩形面積 y 與 x 的函數關係式是 ________________;

當 $x=$ ______ 時,矩形面積 y 取得最 __________ 值為 ____________。

8. 某商場銷售一種進價為 20 元/臺的臺燈,經調查發現,該臺燈每天的銷售量 w(臺)與銷售單價 x(元)滿足 $w=-2x+80$,設銷售這種臺燈每天的利潤為 y(元),

(1) 求 y 與 x 之間的函數關係式;[提示:利潤 =(銷售單價 − 進價)× 銷售量]。

(2) 在保證銷售量盡可能大的前提下,該商場銷售臺燈每天想獲得 150 元的利潤,那麼應該將銷售單價定為多少元?

(3) 當銷售單價定為多少元時,每天的利潤最大? 最大利潤為多少?

9. 求函數 $y=\dfrac{6x-5}{3x^2-6x+7}$ 的最大值和最小值。

10. 求函數 $y=\dfrac{2}{x^2+2x+4}$ 的最小值和最大值。

三、習題・鞏固・評估・解答

1. 設方程 $x^2-6x+3=0$ 的兩個根為 α,β,求下列各式的值。

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$;(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$;(3) $(\alpha-\beta)^2$;(4) $(\alpha-3)(\beta-3)$;(5) $\alpha^3+\beta^3$。

解: 由韋達定理得 $\alpha+\beta=6,\alpha\beta=3$;

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{6}{3}=2$;

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{36-6}{3}=10$;

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36-12=24$;

(4) $(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=3-18+9=-6$;

(5) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=6[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]=6(36-9)=162$。

2. 設$f(x)=x^2-8x$及$g(x)=x^2+4x-7$,求$f(x)+g(x)$的最小值。

解:$f(x)+g(x)=(x^2-8x)+(x^2+4x-7)=2x^2-4x-7$,

當$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{4}=1$時,$f(x)+g(x)$的最小值為$c-\frac{b^2}{4a}=-7-\frac{16}{8}=-9$。

3. 函數$y=x^2+bx+c$的圖象與y軸相交於點$C(0,10)$,並與x軸相交於點$A(2,0)$和點B,求b和c的值和點B的坐標。

解:把點A和點C的座標代入$y=x^2+bx+c$,得$b=-7$, $c=10$;

則有$y=x^2-7x+10$;

令$y=0$,得$x^2-7x+10=0$,得$x_1=2$,$x_2=5$,故$B(5,0)$。

4. 設二次函數$f(x)$的最大值$f(-3)=7$,且其圖象經過點$P(-5,4)$,求$f(x)$的解析式。

解(用頂點式):設$f(x)=a(x+3)^2+7$,把$x=-5$,$y=4$代入解得$a=-\frac{3}{4}$,

故所求為$f(x)=-\frac{3}{4}(x+3)^2+7$。

5. 若$2x+y=3$,求x^2+y^2的最小值。

解(公式法):由$2x+y=3$,得$y=3-2x$,

故$x^2+y^2=x^2+(3-2x)^2=5x^2-12x+9$,

$\because a=5>0, b=-12, c=9$,

$\therefore$ 當$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{10}=\frac{6}{5}$時,$(x^2+y^2)_{\text{最小值}}=c-\frac{b^2}{4a}=9-\frac{(-12)^2}{20}=\frac{9}{5}$。

6. (1) 已知拋物線$y=ax^2-6x+3$與x軸有交點,求a的取值範圍。

解:由題設知$\triangle=b^2-4ac=36-12a\geq 0$,得$a\leq 3$。

(2) 拋物線$y=-x^2+9$與x軸的交點座標是______,與y軸的交點座標是______。

解:令$y=0$,得$x=\pm 3$,令$x=0$,得$y=9$;

故拋物線與x軸的交點座標是$(\pm 3,0)$,與y軸的交點座標是$(0,9)$。

7. 用長為60的繩子圍成一個矩形,設矩形的一邊為x,則矩形另一邊為__________;矩形面積y與x的函數關係式是_______________;當$x=$________時,矩形面積取得最________值為________。

解:$30-x$;

$y=x(30-x)$;

15,大,225;

8. 某商場銷售一種進價為 20 元/臺的臺燈,經調查發現,該臺燈每天的銷售量 w(臺)與銷售單價 x(元) 滿足 $w=-2x+80$,設銷售這種臺燈每天的利潤為 y(元),

(1) 求 y 與 x 之間的函數關係式;[提示:利潤 =(銷售單價 − 進價)× 銷售量]。

(2) 在保證銷售量盡可能大的前提下,該商場銷售臺燈每天想獲得 150 元的利潤,那麼應該將銷售單價定為多少元?

(3) 當銷售單價定為多少元時,每天的利潤最大?最大利潤為多少?

解:(1) $y=(x-20)w=(x-20)(-2x+80)=-2x^2+120x-1600$;$(20<x<40)$

(2) 由 $-2x^2+120x-1600=150$,得 $x^2+60x+875=0$;

$$由求根公式得 x_1=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}=35, x_2=\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}=25,$$

要銷售量 $w=-2x+80$ 盡可能大,則要 x 盡可能小,故應將銷售單價定為 25 元。

(3) 由 $y=-2x^2+120x-1600$ 知,$a=-2, b=120, c=-1600$,

當 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{120}{-4}=30$ 時,$y_{max}=c-\frac{b^2}{4a}=-1600-\frac{14400}{-8}=200$,

故當銷售單價定為 30 元時,每天的利潤最大,最大利潤為 200 元。

9. 求函數 $y=\frac{6x-5}{3x^2-6x+7}$ 的最大值和最小值。

解(判別式法):因為 $a=3>0, b=-6, c=7$,得 $\triangle<0$,

故 $3x^2-6x+7>0$ 對任意實數 x 恆成立. 故定義域為 R 。

(1) 當 $y\neq 0$ 時,原式可化為 $3yx^2-6yx+7y=6x-5$,

即 $3yx^2-(6y+6)x+(7y+5)=0$,

上述方程有解,得 $\triangle\geq 0$,

即 $(6y+6)^2-4\times 3y\times(7y+5)\geq 0$,

得 $4y^2-y-3\leq 0$,得 $(4y+3)(y-1)\leq 0$,解得 $-\frac{3}{4}\leq y\leq 1$ 且 $y\neq 0$。

(2) 當 $y=0$ 時,$6x-5=0, x=\frac{5}{6}\in R$,從而 $y=0$ 也成立 。

綜上所述,得所求的函數的值域為 $\left[-\frac{3}{4},1\right]$,

故它的最大值和最小值分別爲 1 及 $-\frac{3}{4}$。

10. 求函數 $y = \dfrac{2}{x^2+2x+4}$ 的最小值和最大值。

解(判別式法):因為 $a=1>0, b=2, c=4$,得 $\triangle<0$,

故 $x^2+2x+4>0$ 對任意實數 x 恆成立. 故定義域為 R。

(1) 當 $y \neq 0$ 時,原式可化為 $yx^2+2yx+4y=2$,

即 $yx^2+2yx+(4y-2)=0$,

上述方程有解,得 $\triangle \geq 0$,

即$(2y)^2-4\times y\times(4y-2)\geq 0$,

得 $3y^2-2y\leq 0$,得$(3y-2)y\leq 0$,解得 $0\leq y\leq \dfrac{2}{3}$ 且 $y\neq 0$,得 $0<y\leq\dfrac{2}{3}$;

(2) 當 $y=0$ 時,分子 $2>0$,分母 $x^2+2x+4>0$,從而分式 $y=0$ 不成立 。

綜上所述,得所求的函數的值域為$\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$,

故它的最大值爲$\dfrac{2}{3}$,沒有最小值。

四、四校・真題・解答

1. (2016 四校模擬卷一 6) 若 a 和 b 為方程 $2x^2-x-5=0$ 的兩個不相同的根,則$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=$

A. $\dfrac{25}{19}$　*B.* $\dfrac{19}{25}$　*C.* $\dfrac{37}{44}$　*D.* $\dfrac{21}{25}$　*E.* $\dfrac{23}{25}$

解法 1:用韋達定理。

由韋達定理得:$a+b=-\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2}, ab=\dfrac{-5}{2}=-\dfrac{5}{2}$;

則$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{5}{2}\right)}{\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{21}{25}$,選 D。

解法 2:用求根公式。

由求根公式得 $2x^2-x-5=0$ 的兩個不相同的根為

$$\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-5)}}{2\times 2}=\frac{1\pm\sqrt{41}}{4},$$

不妨設 $a=\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}, b=\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}$,得 $a^2=\dfrac{42+2\sqrt{41}}{16}=\dfrac{21+\sqrt{41}}{8}$,

$b^2=\frac{42-2\sqrt{41}}{16}=\frac{21-\sqrt{41}}{8}$,

從而$\frac{1}{a^2}=\frac{8}{21+\sqrt{41}}$,$\frac{1}{b^2}=\frac{8}{21-\sqrt{41}}$,

得$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{8}{21+\sqrt{41}}+\frac{8}{21-\sqrt{41}}=8\times\frac{(21-\sqrt{41})+(21+\sqrt{41})}{(21+\sqrt{41})(21-\sqrt{41})}=$
$\frac{8\times21\times2}{441-41}=\frac{8\times21\times2}{400}=\frac{21}{25}$,選 D。

解法 3:方程法。

$\because$ a 和 b 為方程 $2x^2-x-5=0$ 的兩個不相同的根,

$\therefore$ $2a^2-a-5=0$,$2b^2-b-5=0$;

兩式相減,得 $2(a^2-b^2)=a-b$,即 $2(a+b)(a-b)=a-b$,而 a 和 b 不相同,

從而可約去 $a-b$,得 $2(a+b)=1$,$a+b=\frac{1}{2}$;

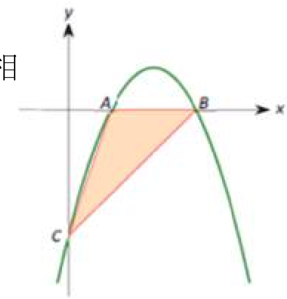
又由 $2a^2-a-5=0$,$2b^2-b-5=0$,

得 $a^2=\frac{a+5}{2}$,$b^2=\frac{b+5}{2}$,故 $a^2+b^2=\frac{a+5}{2}+\frac{b+5}{2}=\frac{a+b}{2}+5=\frac{21}{4}$,

由 $ab=-\frac{5}{2}$,得 $a^2b^2=(ab)^2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$,

則$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{25}{4}}=\frac{21}{25}$,選 D。

2.(2016 四校模擬卷二 1)已知拋物線 $y=-x^2+4x-3$ 與 x 軸相交於 A、B 兩點,并且與 y 軸相交於 C 點。求 ΔABC 的面積。



解:因為 $-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)$,

所以拋物線的 x 截距位於 $A(1,0)$,$B(3,0)$,

因為該二次多項式的常數項是 -3,

所以拋物線的 y 截距位於 $C(0,-3)$(如圖)。

由上可知 $\triangle ABC$ 是一個底邊長為 $3-1=2$、高為 3 的三角形。

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=3$。

3.(2017 四校一 5)若 $x+\frac{1}{x}=6+\frac{1}{6}$,則 $x=$

$A.\ 6$　　$B.\ \frac{1}{6}$　　$C.\ 6$ 或 $\frac{1}{6}$　　$D.\ 6$ 或 $-\frac{1}{6}$　　$E.\ -6$ 或 $\frac{1}{6}$

解法 1: 一元二次方程解法

$\because x+\frac{1}{x}=6+\frac{1}{6}$, $\therefore \frac{x^2+1}{x}=\frac{37}{6}$,

整理得 $6x^2-37x+6=0$,解得 $x=6$ 或 $\frac{1}{6}$,選 C。

解法 2: 輪換對稱式比對法

$\because x+\frac{1}{x}=6+\frac{1}{6}$, $\therefore \begin{cases} x=6 \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{6} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{x}=6 \end{cases}$,解得 $x=6$ 或 $\frac{1}{6}$,選 C。

解法 3: 賦值法

當 $x=6$ 時,原式成立;當 $x=\frac{1}{6}$ 時,原式也成立;故所求的解為 $x=6$ 或 $\frac{1}{6}$,選 C。

4.(2017 四校一 8)函數 $6(7-x)+[9-(7-x)]x$ 的最小值是

$A.\ 36$　　$B.\ 42$　　$C.\ 38$　　$D.\ 34$　　$E.$ 以上皆非

解法 1: 二次函數的一般式

由 $6(7-x)+[9-(7-x)]x=x^2-4x+42$,設 $y=x^2-4x+42$,

$\because a=1>0$,函數圖象開口向上,

$\therefore$ 當 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times 1}=2$ 時,函數有最小值 $y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times 1\times 42-(-4)^2}{4\times 1}=38$;選 C。

解法 2: 二次函數的頂點式

由 $6(7-x)+[9-(7-x)]x=x^2-4x+42=(x-2)^2+38$,設 $y=(x-2)^2+38$,

$\because a=1>0$,函數圖象開口向上,$\therefore$ 當 $x=2$ 時,函數有最小值 $y_{min}=38$;選 C。

解法 3: 二次函數的交點式

由 $6(7-x)+[9-(7-x)]x=x^2-4x+42$,設 $y=x^2-4x+42$,

得 x_1+x_2 等於 $x^2-4x+42$ 中的 $-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{1}=4$。$\because a=1>0$,函數圖象開口向上,

$\therefore$ 當 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=2$ 時,函數有最小值 $y_{min}=2^2-4\times 2+42=38$;選 C。

5.（2018 四校一 3）若方程 $3x^2 - 4x + k = 0$ 的兩根之差是$\frac{5}{3}$,則 $k =$

$A.\ \frac{2}{3}$　　$B.\ 3$　　$C.\ -\frac{1}{6}$　　$D.\ -\frac{3}{4}$　　$E.$ 以上皆非

解法 1:由一元二次方程的求根公式 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

得 $x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{\sqrt{16 - 12k}}{3} = \frac{5}{3}$,得 $k = -\frac{3}{4}$,選 D。

解法 2:由一元二次方程的根與係數的關係(韋達定理),

得 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$,$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k}{3}$,

又 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{k}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$,解得 $k = -\frac{3}{4}$,選 D。

解法 3:由一元二次方程的根與係數的關係(韋達定理),

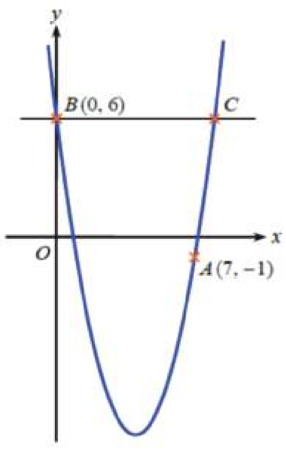
得 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$,　　①

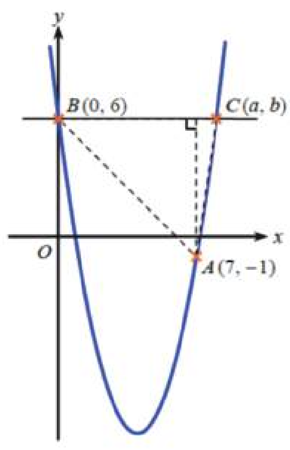
$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k}{3}$,　　②

又已知 $x_1 - x_2 = \frac{5}{3}$,　　③

聯立 ①,③ 解得 $x_1 = \frac{9}{6}$,$x_2 = -\frac{1}{6}$,代入 ② 得 $k = -\frac{3}{4}$,選 D。

6.（2018 四校二 3）在下圖中,$y = x^2 - px + q$ 的圖像通過點 $A(7, -1)$,且與 y 軸交於點 $B(0, 6)$。點 C 是圖像上的另一點,使得 BC 平行於 x 軸。





(a) 求 p 及 q 的值。

(b) 求點 C 的坐標。

(c) 求 ΔABC 的面積。

解:(a) 由 $y=x^2-px+q$ 的圖像通過點 $A(7,-1)$,且與 y 軸交於點 $B(0,6)$,

得$\begin{cases}7^2-7p+q=-1\\0+0+q=6\end{cases}$,解得$\begin{cases}p=8\\q=6\end{cases}$,故 $y=x^2-8x+6$;

(b) 設 $C(a,b)$,由 BC 平行於 x 軸,得 $b=6$,

由點 C 在 $y=x^2-8x+6$ 的圖像上,得 $a^2-8a+6=6$,

解得 $a=8$,$a=0$(不合,捨去),故點 $C(8,6)$;

(c) 因為三角形 ABC 邊上的高等於點 $A(7,-1)$ 到 BC 的距離 $=6-(-1)=7$,又

$|BC|=8$,得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 8\times 7=28$;

7.(2019 四校一 12) 以方程 $x^2-3x+1=0$ 的兩個根的平方為根的一元二次方程是

$A.\ x^2-7x-1=0$　　$B.\ x^2-7x+1=0$　　$C.\ x^2+7x+1=0$

$D.\ x^2+3x-1=0$　　$E.\ x^2-x+7=0$

解:設方程 $x^2-3x+1=0$ 的兩個根為 x_1,x_2,由韋達定理得 $x_1+x_2=3$,$x_1x_2=1$;

得 ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2\times1=7$ 及 ${x_1}^2\cdot{x_2}^2=(x_1x_2)^2=1^2=1$;

則以 x_1,x_2 的平方為根的一元二次方程是 $x^2-({x_1}^2+{x_2}^2)x+{x_1}^2\cdot{x_2}^2=0$,

即 $x^2-7x+1=0$ 為所求,選 B。

8.(2021 四校一 4) 若對所有實數 x,$y=mx^2+6x+3m$ 都為正數,求 m 的取值範圍。

$A.\ 0<m<\sqrt{3}$　　$B.\ m>\sqrt{3}$　　$C.\ -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

$D.\ -\sqrt{3}<m<0$　　$E.$ 以上皆非

解析:(<u>直接求解</u>法) 當 $m=0$ 時,$y=6x$ <u>不滿足</u>對所有實數 x,y 都為正數,所以 $m\neq0$,

從而 $y=mx^2+6x+3m$ 是二次函數,根據其圖像特徵和函數性質,

得$\begin{cases}m>0\\\triangle=36-4\cdot m\cdot 3m<0\end{cases}$,解得 $m>\sqrt{3}$,選 B。

(<u>間接賦值</u>法) 取 $m=1$,可以排除 A、C;

取 $m=-1$,可以排除 D;

取 $m=2$,B 符合,可以排除 E;選 B。

9.(2021 四校一 5) 已知 $-2x^2+3x-7=0$ 的根為 α 和 β。下列哪一個方程的根為 $\dfrac{1}{\alpha}$ 和 $\dfrac{1}{\beta}$?

$A.\ x^2-3x+7=0$　　$B.\ 7x^2-3x+2=0$　　$C.\ 7x^2+3x+2=0$

$D.\ 2x^2-3x-7=0$　　$E.$ 以上皆非

解析:(<u>直接排除</u>法) 由 $-2x^2+3x-7=0$ 的根為 α 和 β,得 $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{-2}=\dfrac{3}{2}$,$\alpha\beta=\dfrac{-7}{-2}$

$=\dfrac{7}{2}$,

得 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{3}{7}$,$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{7}$,

在選項 A 的方程中,兩根之和 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-\dfrac{-3}{1}=3\neq\dfrac{3}{7}$,可以排除,

在選項 B 的方程中,兩根之和 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-\dfrac{-3}{7}=\dfrac{3}{7}$,$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{2}{7}$,符合題設。

(<u>構造方程</u>法) 由 $-2x^2+3x-7=0$ 的根為 α 和 β,得 $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{-2}=\dfrac{3}{2}$,$\alpha\beta=\dfrac{-7}{-2}$

$=\dfrac{7}{2}$,得 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{3}{7}$,$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{7}$,

由根與係數的關係式(韋達定理),構造以 x 為元的一元二次方程,

得 $x^2+-\dfrac{3}{7}x+\dfrac{2}{7}=0$,即 $7x^2-3x+2=0$。

10. (2021 四校二 3) 若 $x,y>0$ 及 $y^2-2mx+x^2=a^2$,其中 a 和 m 為常數,且 $0<m<1$。

(a) 証明 $(1-m^2)y^2=a^2-(x-my)^2$。(3 分)

(b) 証明當 $y=\dfrac{x}{m}$ 時 y 值達至最大。(3 分)

(c) 由此決定 x 值(以 a 和 m 表示) 使 y 值達至最大。(2 分)

證:(a) 右邊 $=a^2-(x^2-2mxy+m^2y^2)=(a^2-x^2+2mxy)-m^2y^2=y^2-m^2y^2=$ 左邊。

(b) 由(a) 的等式得 $y^2=\dfrac{a^2}{1-m^2}-\dfrac{(x-my)^2}{1-m^2}$　　(1)

由於 $0<m<1$,因此 $0<m^2<1$,

從而 $\dfrac{a^2}{1-m^2}\geq 0$,及 $\dfrac{(x-my)^2}{1-m^2}\geq 0$ 對任何實數 x,y 都成立。

故此從(1) 知道對任何實數 x,y 都有 $y^2\leq\dfrac{a^2}{1-m^2}$,即 $\dfrac{a^2}{1-m^2}$ 為 y^2 的最大值,並

且在 $x - my = 0$ 即 $y = \dfrac{x}{m}$ 時，y^2 達至這個最大值。

由 $y > 0$，當 $y = \dfrac{x}{m}$ 時 y 值也達至最大。

（c）設 y_{max} 代表 y 的最大值，並設當 $x = x_0$ 時 y 達至最大值。

由（b）得知 $y_{max} = \sqrt{\dfrac{a^2}{1 - m^2}} = \dfrac{|a|}{\sqrt{1 - m^2}}$，並且 $x_0 = my_{max} = \dfrac{m|a|}{\sqrt{1 - m^2}}$。

11.（2022 四校一 5）若方程 $px^2 - 2(p + 3)x + p - 1 = 0$ 有實根，求 p 的取值範圍。

A. $0 \le p \le \dfrac{5}{7}$　　*B.* $p \ge -\dfrac{5}{7}$　　*C.* $-\dfrac{5}{7} \le p \le 1$　　*D.* $p \ge -\dfrac{9}{7}$　　*E.* 以上皆非

分析：本題考查方程的實數根的個數，要注意看清是一元一次方程還是一元二次方程。

解：（1）若 $p = 0$，得 $0 - 2(0 + 3)x + 0 - 1 = 0$，原方程是一元一次方程，

解得 $x = -\dfrac{1}{6}$，方程有實根，滿足條件；

（2）若 $p \neq 0$，原方程是一元二次方程，

由 $\triangle \ge 0$，得 $[-2(p + 3)]^2 - 4p(p - 1) \ge 0$，

整理得 $7p + 9 \ge 0$，得 $p \ge -\dfrac{9}{7}$，從而 $p \ge -\dfrac{9}{7}$ 且 $p \neq 0$；

綜合（1）（2），得 $p \ge -\dfrac{9}{7}$，故而選 D。

12.（2022 四校一 12）若方程 $3x^2 - 8x + m = 0$ 的兩個實根為 x_1 和 x_2。若 $\dfrac{1}{x_1}$ 和 $\dfrac{1}{x_2}$ 的算術平均數為 2，則 m 之值是多少？

A. -2　　*B.* -1　　*C.* 4　　*D.* 1　　*E.* 2

分析：本題結合了一元二次方程的根與係數的關係，考查了最基本的算術平均數的統計問題。

解：由方程 $3x^2 - 8x + m = 0$ 的兩個實根為 x_1 和 x_2，

根據韋達定理，得 $x_1 + x_2 = \dfrac{8}{3}$，$x_1x_2 = \dfrac{m}{3}$，

由 $\dfrac{1}{x_1}$ 和 $\dfrac{1}{x_2}$ 的算術平均數為 2，得 $\dfrac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}}{2} = 2$，

得 $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 4$，得 $\dfrac{\dfrac{8}{3}}{\dfrac{m}{3}} = 4$，得 $\dfrac{8}{m} = 4$，得 $m = 2$，選 E。

13.（2022 四校二 1）已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖像 C 通過點 $(5,0)$，對稱軸為 $x=2$，且 $f(x)$ 有最小值 -9。

（a）求 a、b 和 c 之值。（3 分）

（b）將圖像 C 向左平移 3 個單位，再向上平移 3 個單位，求所得圖像的函數表達式。（2分）

（c）設函數 $g(x)=f(3sinx)$，求函數 $g(x)$ 的最大值和最小值。（3 分）

解:（a）由對稱軸 $x=2$，$f(x)$ 最小值為 -9，

設二次函數頂點式 $f(x)=a(x-2)^2-9$，

由 $f(5)=0$，得 $a(5-2)^2-9=0$，得 $a=1$，

則 $f(x)=(x-2)^2-9=x^2-4x-5$，

故 $a=1$，$b=-4$，$c=-5$。

（b）把 C 向左平移 3 個單位，得 $h(x)=f(x+3)=(x+3)^2-4(x+3)-5=x^2+2x-8$，再把圖像向上平移 3 個單位，得 $H(x)=h(x)+3=x^2+2x-5$。

（c）$g(x)=(3sinx)^2-4(3sinx)-5=9\left(sinx-\dfrac{2}{3}\right)^2-9$，

因為 $-1\le sinx\le 1$，

當 $sinx$ 與 $-\dfrac{2}{3}$ 同號取 $sinx=-1$ 時，$g(x)_{max}=9\left(-1-\dfrac{2}{3}\right)^2-9=16$，

當 $sinx$ 與 $-\dfrac{2}{3}$ 異號取 $sinx=\dfrac{2}{3}$ 時，$g(x)_{min}=9\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\right)^2-9=-9$，

故函數 $g(x)$ 的最大值和最小值分別為 16 和 -9。

註:原卷所附參考答案如下:

（a）由題意知

$$\begin{cases}25a+5b+c=0\\ b=-4a\\ 4a+2b+c=-9\end{cases},$$

解得

$$a=1,b=-4,c=-5。$$

因此所求函數解析式為

$$f(x)=x^2-4x-5。$$

（b）$y=(x+1)^2-6=x^2+2x-5$;

（c）$g(x)=(3sinx)^2-4(3sinx)-5=(3sinx-2)^2-9$。

由於 $-3\le 3sinx\le 3$，$3\in[-3,3]$，函數 $g(x)$ 在 $3sinx=-3$ 處取得最大值，即

$$Maxg(x)=f(-3)=16。$$

函數 $g(x)$ 在 $3sinx=2$ 處取得最小值，即

$$Ming(x)=f(2)=-9。$$

參考資料：

1. https://www.gaes.gov.mo/admission/unification 澳門高等教育輔助辦公室“四校聯考”專頁.
2.《澳門數學教育》2019 年第 17 期.
“四校聯考(2016 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答”,鄧海棠.
3.《澳門教育》2019 年第 2 期(總第 260 期).
“四校聯考(2017 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上)”,鄧海棠.
4.《澳門教育》2019 年第 3 期(總第 261 期).
“四校聯考(2017 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下)”,鄧海棠.
5.《澳門數學教育》2020 年第 18 期.
“四校聯考(2018 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答”,鄧海棠.
6.《澳門教育》2019 年第 4 期(總第 262 期).
“四校聯考(2019 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上)”,鄧海棠.
7.《澳門教育》2020 年第 1 期(總第 263 期).
“四校聯考(2019 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下)”,鄧海棠.
8.《澳門教育》2021 年第 1 期(總第 266 期).
“四校聯考(2020 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答”,鄧海棠.
9.《澳門教育》2022 年第 2 期(總第 271 期).
“又近四校聯考時——2021 年澳門四校聯考數學正卷真題解答”,鄧海棠.

指向思維能力提升的新高考數學備考策略

—— 以 2024 年新高考 I 卷數學第 16 題的六種解法為例

廣東省清遠市清新區第一中學

譚麗君

2024 年新高考數學 I 卷持續深化考試內容改革,與以往全國卷新高考數學試卷的結構相比,有較大變化. 命題風格延續了 2024 年 1 月份九省聯考的風格,考主幹、考能力、考素養,重思維、重創新、重應用,突出考查思維過程、思維方法和創新能力. 在突出對基礎知識、基本技能、基本活動經驗和基本思想方法考查的同時,突出對數學素養的考查,展現了數學學科的育人價值,落實立德樹人根本任務,體現高考改革要求. 2024 年新高考 I 卷第 16 題尤其凸顯數學素養,彰顯數學本質. 本文以總結該題的六種解法為主線,強調思維才是數學的本質. 若要提高數學思維,教師必須注重課本和試題研究,尤其是高三教師,還要學會將題型歸類,從多方位訓練學生思維能力.

一、問題呈現,真題剖析

2024 年新高考 I 卷第 16 題: 已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 為橢圓 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上兩點.

(1) 求 C 的離心率;

(2) 若過 P 的直線 l 交 C 於另一點 B,且 $\triangle ABP$ 的面積為 9,求 l 的方程.

分析:(1) 略

(2) 法一:

分析:以 $|AP|$ 為底,求出三角形的高,即點 B 到直線 AP 的距離,再利用平行線距離公式得到平移後的直線方程,聯立橢圓方程得到 B 點座標,則得到直線 l 的方程.

【小問 2 詳解】$k_{AP}=\dfrac{3-\frac{3}{2}}{0-3}=-\dfrac{1}{2}$,則直線 AP 的方程為 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$,即 $x+2y-6=0$,

$|AP|=\sqrt{(0-3)^2+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$,由(1) 知 $C:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$,

設點 B 到直線 AP 的距離為 d,則 $d=\dfrac{2\times 9}{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$,則將直線 AP 沿著與 AP 垂直的方向平移 $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ 單位即可,此時該平行線與橢圓的交點即為點 B,

設該平行線的方程為:$x+2y+C=0$,

則 $\dfrac{|C+6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$,解得 $C=6$ 或 $C=-18$,

當 $C=6$ 時,聯立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ x+2y+6=0\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=0\\ y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\\ y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$,

即 $B(0,-3)$ 或 $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$,

當 $B(0,-3)$ 時,此時 $k_l=\dfrac{3}{2}$,直線 l 的方程為 $y=\dfrac{3}{2}x-3$,即 $3x-2y-6=0$,

當 $B\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$ 時,此時 $k_l=\dfrac{1}{2}$,直線 l 的方程為 $y=\dfrac{1}{2}x$,即 $x-2y=0$,

當 $C=-18$ 時,聯立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ x+2y-18=0\end{cases}$ 得 $2y^2-27y+117=0$,

$\triangle=27^2-4\times 2\times 117=-207<0$,此時該直線與橢圓無交點.

綜上,直線 l 的方程為 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

評註:法一運用方程的思想,利用兩平行線之間的距離公式,聯立方程直接解出點的座標,再寫出直線的方程,思維直觀,是通用的方法,但是運算量大.

法二:

分析:同法一得到點 B 到直線 AP 的距離,再設 $B(x_0,y_0)$,根據點到直線距離和點在橢圓上得到方程組,解出即可.

【小問 2 詳解】同法一得到直線 AP 的方程為 $x+2y-6=0$,

點 B 到直線 AP 的距離 $d=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$,

設 $B(x_0,y_0)$,則 $\begin{cases}\dfrac{|x_0+2y_0-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\\ \dfrac{x_0^2}{12}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x_0=-3\\ y_0=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=-3\end{cases}$,

即 $B(0,-3)$ 或 $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$,以下同法一.

評註:法二運用方程的思想,直接解出點 B 的座標,思維直觀,是通用的方法,但是運算量跟法一一樣大.

法三:

分析:同法一得到點 B 到直線 AP 的距離,利用橢圓的參數方程即可求解.

【小問 2 詳解】同法一得到直線 AP 的方程為 $x+2y-6=0$,

點 B 到直線 AP 的距離 $d=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$,

設 $B\left(2\sqrt{3}cos\theta,3sin\theta\right)$,其中 $\theta\in[0,2\pi)$,則有 $\dfrac{\left|2\sqrt{3}cos\theta+6sin\theta-6\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$,

聯立 $cos^2\theta+sin^2\theta=1$,解得 $\begin{cases}cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}cos\theta=0\\ sin\theta=-1\end{cases}$,

即 $B(0,-3)$ 或 $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$,以下同法一.

評註:法三運用橢圓的參數方程,巧妙地解出點 B 的座標,運算量相比法一和法二減少了不少,體現了優秀的思維品質.

法四:

分析:首先驗證直線 AB 斜率不存在的情況,再設直線 $y=kx+3$,聯立橢圓方程,得到點 B 座標,再利用點到直線距離公式即可.

【小問 2 詳解】當直線 AB 的斜率不存在時,此時 $B(0,-3)$,

$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$,符合題意,此時 $k_l=\dfrac{3}{2}$,

直線 l 的方程為 $y=\dfrac{3}{2}x-3$,即 $3x-2y-6=0$,

當線 AB 的斜率存在時,設直線 AB 的方程為 $y=kx+3$,

聯立橢圓方程有 $\begin{cases}y=kx+3\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$,則 $(4k^2+3)x^2+24kx=0$,其中 $k\neq k_{AP}$,即 $k\neq-\dfrac{1}{2}$,

解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{-24k}{4k^2+3}$,$k\neq0$,$k\neq-\dfrac{1}{2}$,

令 $x=\dfrac{-24k}{4k^2+3}$,則 $y=\dfrac{-12k^2+9}{4k^2+3}$,則 $B\left(\dfrac{-24k}{4k^2+3},\dfrac{-12k^2+9}{4k^2+3}\right)$

同法一得到直線 AP 的方程為 $x+2y-6=0$,

點 B 到直線 AP 的距離 $d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$,則$\frac{\left|\frac{-24k}{4k^2+3}+2\times\frac{-12k^2+9}{4k^2+3}-6\right|}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$,解得 $k=\frac{3}{2}$,

此時 $B\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$,則得到此時 $k_l=\frac{1}{2}$,直線 l 的方程為 $y=\frac{1}{2}x$,即 $x-2y=0$,

綜上,直線 l 的方程為 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

評註:法四從直線 AB 的斜率是否存在進行分類討論,再運用方程的思想解出點 B 的座標,運算量也比較大.

法五:

分析:首先考慮直線 PB 斜率不存在的情況,再設 $PB:y-\frac{3}{2}=k(x-3)$,利用弦長公式和點到直線的距離公式即可得到答案.

【小問 2 詳解】

當 l 的斜率不存在時,$l:x=3$,$B\left(3,-\frac{3}{2}\right)$,$|PB|=3$,$A$ 到 PB 距離 $d=3$,

此時 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}\neq 9$ 不滿足條件.

當 l 的斜率存在時,設 $PB:y-\frac{3}{2}=k(x-3)$,令 $P(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

$\begin{cases} y=k(x-3)+\frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$ 消 y 可得 $(4k^2+3)x^2-(24k^2-12k)x+36k^2-36k-27=0$,

$\triangle=(24k^2-12k)^2-4(4k^2+3)(36k^2-36k-27)>0$,且 $k\neq k_{AP}$,即 $k\neq-\frac{1}{2}$,

$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{24k^2-12k}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\frac{36k^2-36k-27}{4k^2+3} \end{cases}$,$|PB|=\sqrt{k^2+1}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}$,

A 到直線 PB 距離 $d=\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$,$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}\cdot\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=9$,

$\therefore k=\frac{1}{2}$ 或$\frac{3}{2}$,均滿足題意,$\therefore l:y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$,

即 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

評註:雖然法五容易想到,但是運算量巨大,詮釋了想得多算得少,即思維是數學的本質.

法六:

分析:設直線與法五一致,利用水準寬乘鉛垂高乘$\frac{1}{2}$,表達面積即可.

【小問 2 詳解】

當 l 的斜率不存在時,$l:x=3$,$B\left(3,-\frac{3}{2}\right)$,$|PB|=3$,$A$ 到 PB 距離 $d=3$,

此時 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}\neq 9$ 不滿足條件.

當直線 l 斜率存在時,設 $l:y=k(x-3)+\frac{3}{2}$,

設 l 與 y 軸的交點為 Q,令 $x=0$,則 $Q\left(0,-3k+\frac{3}{2}\right)$,

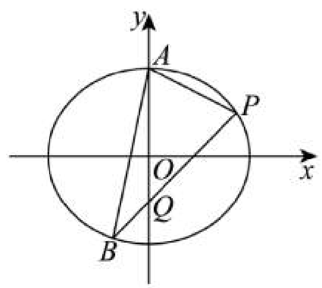
聯立$\begin{cases} y=kx-3k+\frac{3}{2} \\ 3x^2+4y^2=36 \end{cases}$,則有$(3+4k^2)x^2-8k\left(3k-\frac{3}{2}\right)x+36k^2-36k-27=0$,

$(3+4k^2)x^2-8k\left(3k-\frac{3}{2}\right)x+36k^2-36k-27=0$,

其中 $\triangle=8k^2\left(3k-\frac{3}{2}\right)^2-4(3+4k^2)(36k^2-36k-27)>0$,且 $k\neq-\frac{1}{2}$,

則 $3x_B=\frac{36k^2-36k-27}{3+4k^2}$,$x_B=\frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$,

則 $S=\frac{1}{2}|AQ||x_P-x_B|=\frac{1}{2}\left|3k+\frac{3}{2}\right|\left|\frac{12k+18}{3+4k^2}\right|=9$,解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$,經代入判別式驗證均滿足題意. 則直線 l 為 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$,即 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.



評註:法六難想到,此法要求學生具有扎實的基本功,尤其需要對圖形的理解很透徹,才能產生這樣具有創新思維的優秀解答.

二、題源分析,備考策略歸納

(一)基礎題:奠基數學思維基礎

人教 A 版數學選修第一冊第 114 頁原題:

練習 2. 經過橢圓$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦點 F_1 作傾斜角為 $60°$ 的直線 l,直線 l 與橢圓相交於 A,B 兩點,求線段 AB 的長.

人教 A 版數學選修第一冊第 145 頁原題:

綜合運用 7. 已知 P 是橢圓 $16x^2+25y^2=1600$ 上的一點,且在 x 軸上方,F_1,F_2 分別是橢圓的左、右焦點,直線 PF_2 斜率為 $-4\sqrt{3}$,求 $\triangle PF_1F_2$ 的面積.

有效途徑 1:高三複習時應該從課本出發,因為高考題來源於教材,又高於教材,第一輪複習將教材裡面的練習題和複習參考題認真研究一遍. 比如上題求 AB 的長,就要將弦長公式以及有關弦長公式的各種曲線都複習一遍,做好題型歸類. 弦長公式之後就要過渡到求面積,面積的範圍.

(二)變式題:拔高數學思維層次

【變式 1】2024 年 1 月九省聯考 18. 已知拋物線 $C: y^2=4x$ 的焦點為 F,過 F 的直線 l 交 C 於 A,B 兩點,過 F 與 l 垂直的直線交 C 於 D,E 兩點,其中 B,D 在 x 軸上方,M,N 分別為 AB,DE 的中點.

(1)證明:直線 MN 過定點;

(2)設 G 為直線 AE 與直線 BD 的交點,求 $\triangle GMN$ 面積的最小值.

【變式 2】2023 年新高考 I 卷第 22 題. 在直角坐標系 xOy 中,點 P 到 x 軸的距離等於點 P 到點$\left(0,\frac{1}{2}\right)$的距離,記動點 P 的軌跡為 W.

(1)求 W 的方程;

(2)已知矩形 $ABCD$ 有三個頂點在 W 上,證明:矩形 $ABCD$ 的周長大於 $3\sqrt{3}$.

有效途徑 2:無論題型怎麼改變,穩紮穩打是應對千變萬化的有效方法. 比如主幹知識重點講練,突出高考“熱點”問題。解析幾何以基本性質、基本運算考查直線與圓錐曲線的綜合問題,如直線和圓錐曲線的交點、弦長、軌跡、定值定點、最值範圍等. 這樣數學思維層次才能得到再次提高.

三、教學感悟

學生的思維是在各種題型中得到提煉的,教師的備考策略決定了學生的思維品質,創

新思維的火花也是從日積月累的基礎知識、基本技能、基本活動經驗和基本思想方法中獲得的. 教師在備考中一個重要環節就是研究試題,誠然試題研究的過程是艱辛的,但結果是喜人的. 通過試題研究,讓教師品嘗到教學的樂趣,提升了教學的境界;讓學生進一步學會從命題人的角度思考問題的本質,提高了複習備考效率. 日常教學和高考複習備考的過程中帶領學生回歸教材,理解數學本質,抓住數學概念的本質才能根本性地解決數學問題,真正提升學生的素養,減負增效。

參考文獻:

[1] 2024 年高考數學全國卷試題專家評析 _ 高考網 2024:1 - 2.
[2]《步步高高三數學大一輪複習》.
[3] 2022 年高考數學試題評析(全國乙卷)—— 中國教育線上.
[4] 張寶臣. 高等師範教育改革與中小學生創新能力的培養[J]. 教育理論與實踐,2004,(2):40.
[5] 安江英,田慧雲. 我國高校創新型人才培養模式的探索和實踐[J]. 中國電力教育,2006,(1):29 - 32.
[6] 張鵬,等. 高校大學生創新能力培養現狀及對策研究[J]. 大學教育科學,2005,(3):50 - 53.

尺規作圖:作 n 邊形的外接正 n 邊形

澳門大學教育學院　　　江春蓮副教授

廣州大學計算科技研究院　　黃勇教授

【问题提出】最近,筆者二在顧森(網名:*matrix*67) 的博客,看到了一道問題:給定正方形各邊上的一個點,用尺規作圖恢復出這個正方形來(*http*://*www*. *matrix*67. *com*/*blog*/*archives*/4649)。于是在自己的微信朋友圈發了一道問題($Q1$):根據正方形四邊上各一點,尺規作圖作出該正方形(圖 1)。這讓筆者一想起自己曾經在課堂上跟學生討論的一道問題($Q2$):矩形 $PQRS$ 的各邊分別經過定四邊形 $ABCD$ 的各個頂點,求矩形 $PQRS$ 的中心 O 的軌迹(圖 2)。

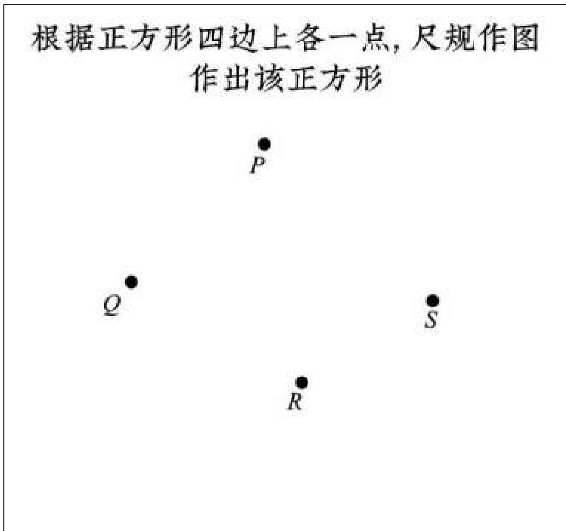


圖 1. 問題 $Q1$

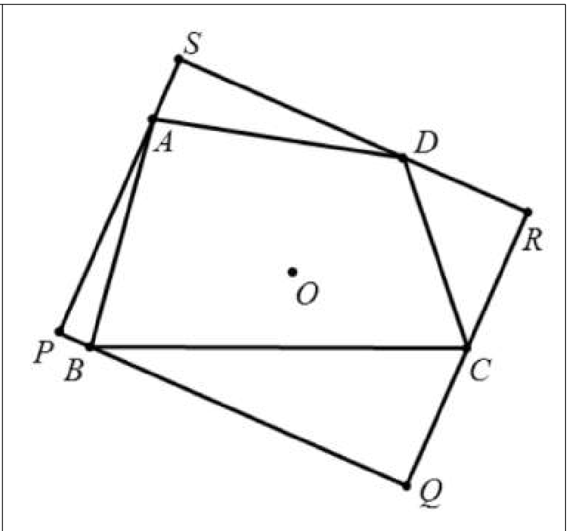


圖 2. 四邊形的外接矩形中心的軌迹

【问题探究】對問題 $Q2$,我們假設四邊形 $PQRS$ 已作出,不難發現,其頂點分別在以 AB、BC、CD 和 DA 爲直徑的向四邊形 $ABCD$ 形外所作的半圓上,所以,我們的作圖步驟(圖 3)是:(1) 以四邊形 $ABCD$ 各邊爲直徑向形外作半圓;(2) 在半圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一點 P,作直綫 PB 交圓弧 $\overset{\frown}{BC}$ 于點 Q,作直綫 QC 交弧 $\overset{\frown}{CD}$ 于點 R,作直綫 RD 交弧 $\overset{\frown}{DA}$ 于點 S,作綫段 PS;(3) 作長方形 $PQRS$、其對角綫和它們的交點 O;(4) 作以點 P 爲主動點,點 O 爲從動點的軌迹。發現其軌迹爲一段弧。

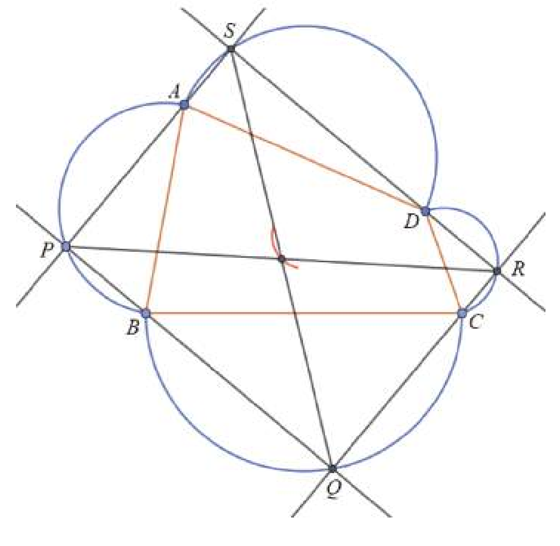


圖 3. 四邊形外接矩形中心的軌迹

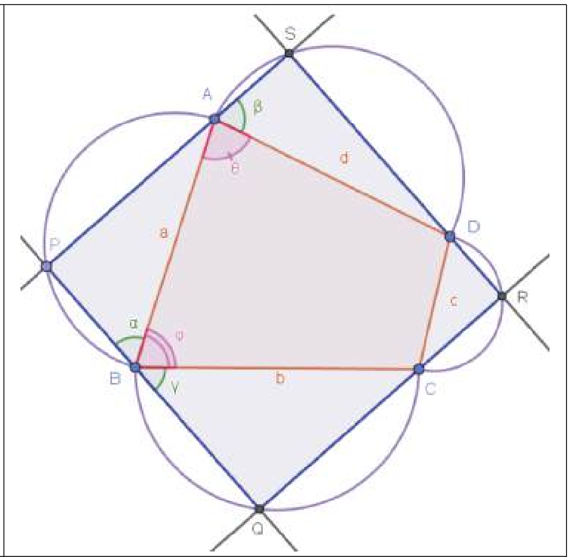


圖 4. 四邊形的外接正方形的作法

回到問題 $Q1$,其給定的四點可以看作是問題 $Q2$ 中四邊形 $ABCD$ 的四點,要作的正方形是問題 $Q2$ 中 $PQRS$ 是正方形的特殊情況,如何找到這一特殊情況,則可考慮做如下的計算。

設四邊形 $ABCD$(圖 4) 的邊 $AB = a$,$BC = b$,$\angle BAD = \theta$,$\angle ABC = \varphi$,又設 $\angle ABP = \alpha$,則 $\angle DAS = \beta = 180° - (90° - \alpha) - \theta = 90° + \alpha - \theta$,$\angle CBQ = \gamma = 180° - \alpha - \varphi$。

在 $\triangle ABP$ 中,$AP = a\sin\alpha$,$BP = a\cos\alpha$.

在 $\triangle CBQ$ 中,$CQ = b\sin\gamma = b\sin(\alpha + \varphi)$,$BQ = b\cos\gamma = - b\cos(\alpha + \varphi)$.

在 $\triangle ADS$ 中,$DS = d\sin\beta = d\cos(\alpha - \theta)$,$AS = d\cos\beta = - d\sin(\alpha - \theta)$.

由 $PS = PQ$ 得:$a\sin\alpha + [- d\sin(\alpha - \theta)] = acoa\alpha + [- b\cos(\alpha + \theta)]$

由兩角和與差的公式展開得:$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a - b\cos\varphi - d\sin\theta}{a - b\sin\varphi - d\cos\theta}$。

由點 C 和 D 分別向邊 AB 作垂綫,不難得到 $b\sin\varphi$、$b\cos\varphi$、$d\sin\theta$ 和 $d\cos\theta$,所以上式中的分子、分母是可以尺規作圖的,由此可知 α 也是可尺規作圖的。需要說明的是,并不是任意給定的四邊形都有外接正方形,只要上述推理中的邊都是正的才可作。

對問題 $Q1$,顧森給出的解答是:假設 A、B、C 和 D 依次是正方形四條邊上的點。過點 B 作 AC 的垂綫,并在該垂綫上截取一點 D',使得 $BD' = AC$。那么,則 D' 也在正方形邊上,且其與點 D 在正方形的同一條邊上。剩下就是過 A 和 C 作 DD' 的垂綫,而過點 B 作 DD' 的平行綫確定各個頂點了(圖 5)。這里用到了正方形內,連接對邊上的點得到的兩條綫段互相垂直時,其長度必相等的性質。

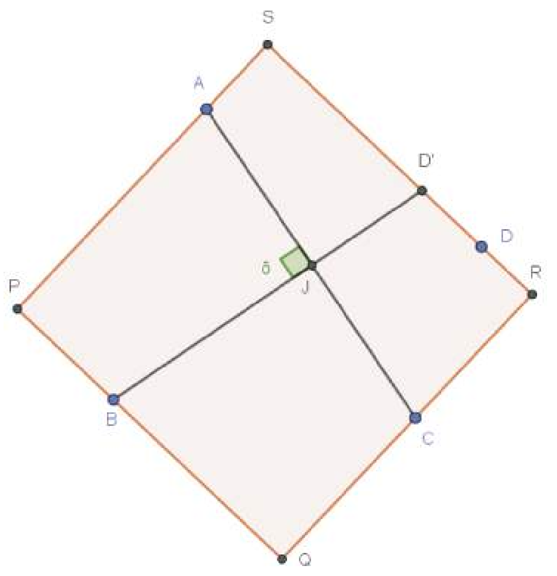


圖 5. 四邊形的外接正方形的作法 2

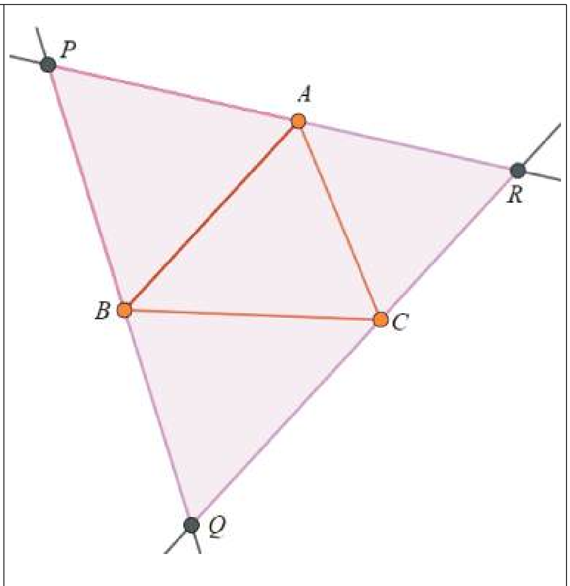


圖 6. 三角形的外接正三角形的作法 1

【问题推广】上述問題 $Q1$,能否往前推廣到三角形,往后推廣到五邊形、六邊形? 于是得到問題 $Q3$,任給 $\triangle ABC$,用尺規作圖作出其外接正三角形。問題 $Q4$,任給五邊形 $ABCDE$,用尺規作圖作出其外接正五邊形。

對問題 $Q3$,比較簡單的辦法是先以 $\triangle ABC$ 的任一邊(如 AB) 爲邊向形外作正三角形 $\triangle ABP$,再過點 C 作邊 AB 的平行綫交 DA、DB 的延長綫分別于點 R 和點 Q,最后連 $\triangle PQR$ 即爲所求(圖 6)。若 $\triangle ABC$ 的三邊互不相等,可以得到 3 個不同的外接正三角形。

更一般性的方法則是仿照上面問題 $Q1$ 的第一種解答(圖 7):先以 $\triangle ABC$ 的三邊向形外作正三角形 $\triangle ABX$、$\triangle BCY$ 和 $\triangle CAZ$;接着作圓弧 $\overset{\frown}{AXB}$、$\overset{\frown}{BYC}$ 和 $\overset{\frown}{CZA}$;在圓弧 $\overset{\frown}{AXB}$ 上任取一點 P,連直綫 PB 交圓弧 $\overset{\frown}{BYC}$ 于點 Q,連直綫 QC 交圓弧 $\overset{\frown}{CZA}$ 于點 R,最后連 $\triangle PQR$ 即爲所求。不難看出,$\triangle PQR$ 的三頂角均爲 $60°$,所以 $\triangle PQR$ 爲正三角形。

對問題 $Q4$,首先要考慮的則是存在性問題。對該問題的探究,我們仍然可以采用作圓弧的方法來嘗試。過程如下(圖 8):先以五邊形 $ABCDE$ 向形外作圓弧,使其上任一點與邊的夾角成 $108°$。在 $\overset{\frown}{AB}$ 弧上任取一點 P,連直綫 PB 交圓弧 $\overset{\frown}{BC}$ 于點 Q,連直綫 QC 交圓弧 $\overset{\frown}{CD}$ 于點 R,連直綫 RD 交圓弧 $\overset{\frown}{DE}$ 于點 S,連直綫 SE 交圓弧 $\overset{\frown}{EA}$ 于點 T,最后連 $PQRST$。接下來,可以依次測量五邊形 $PQRST$ 的各邊的長度,拖動點 P,看能否在某點使 $PQRST$ 成爲正五邊形。不難發現,對圖 8 的五邊形 $ABCDE$,這樣的點 P 是不存在的。當然,容易驗證當 $ABCDE$ 爲正五邊形時,按上述方法所作的弧上的 $\overset{\frown}{AB}$ 任一點均能使得 $PQRST$ 成爲正五邊形。

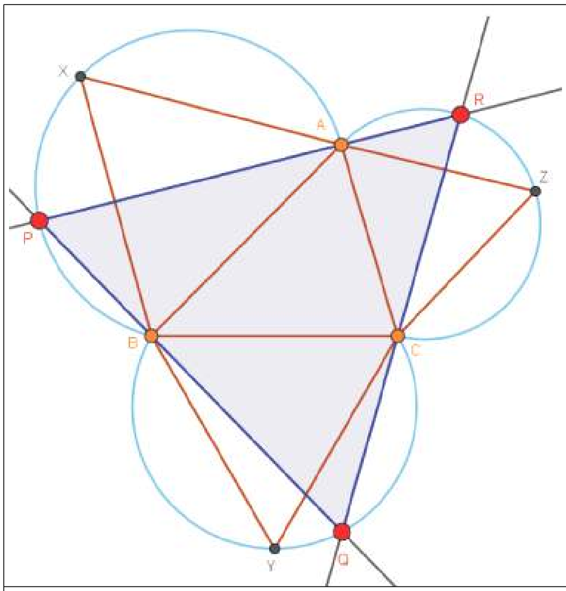


圖 7. 三角形的外接正三角形的作法 2

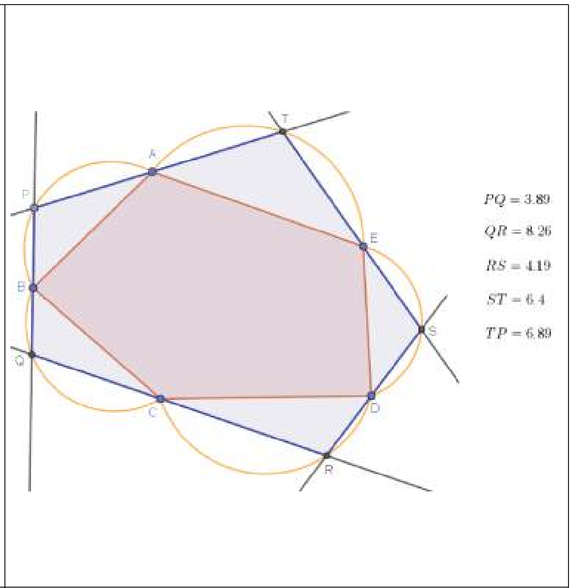


圖 8. 五邊形的外接等角五邊形的作法

本文討論的問題說明兩點:(1) 有了動態幾何軟件的幫助,我們可以讓學生探究較難的尺規作圖問題,在這個問題的探究中,學生甚至可以找到解決問題的一般方法;(2) 從一個問題延展出去,學生可以探究一類問題,該類問題在一種情況下有多種解,而在另外一種情況下,其解則可能不存在。如對一般的三角形,其外接正三角形有無窮多個;對一般的四邊形,其外接正方形則只有一個;而對一般的五邊形,其解則可能不存在。這樣問題的探究,可以讓學生看到數學問題的多面性,形成豐富的數學思維。

勾股定理教學設計

廣西百色市右江區第六初級中學　唐翠玲

澳門培華中學　梁莉娜

摘要：本教學設計內容為"勾股定理及其逆定理"。課本上所提及的例子是本節課的知識點，但難以引起學生興趣，為此在這次教學上特意補充了一些課本上沒有的例子。

利用生本教學模式，小組合作、討論、展示，讓學生在自主探究，合作交流中獲取知識。透過教學活動和創意設計，讓學生能夠探索、應用和證明定理，培養學生的數學思維、抽象能力和創新意識。內容由探究勾股定理開始，引導學生從已有的知識出發，先進行有關三角形的知識回顧，接下來利用"柯南偵探團" 的競選遊戲進行遊戲化教學，對勾股定理的深入研究和探索，有效提升學生的學習興趣和積極性，幫助他們理解數學概念，培養解決問題的能力。知識點逐層深入展開。在證明勾股定理時，除了運用拼圖遊戲證明猜想，亦應用 *GeoGebra* 設計了一個課件作為操練，更直觀地驗證猜想："當不斷改變直角三角形的一般形態時，直角邊的平方和一定會等於斜邊的平方"，化抽象為具體，讓幾何證明更加豐富有趣。同時，透過教學設計中的各種創新教學策略和教學用具，可以提升教學的互動性和趣味性，促進學生主動學習，提高教學效果。

關鍵詞：生本教學　勾股定理　遊戲

一、教學策略設計

根據本節課的特點和學生的學習需求，所以採用了以下的教學策略設計。

（一）生本教學

在這個教案中，體現了以生為本的教學理念。強調以學生為中心，圍繞學生的認知特點和學習需求進行設計。教學目標明確指出，要發展學生的應用意識和抽象能力，鼓勵學生在掌握勾股定理的基礎上，能夠解決實際問題。這種目標的設定，體現了生本教學的核心思想，即注重學生的自主學習和探究能力的培養。教案中設計了多個互動環節，例如師徒討論、小組合作、上臺展示等，讓學生在實踐中學習，並鼓勵他們提出問題、解決問題。

課堂中做到課堂還給學生，老師走下講臺、學生登上講臺，由學生講解代替老師的講解。在班內考慮學生能力的高低、性別、性格等因素，把學生劃分成四人一組的小組。在課

堂上有需要討論的地方進行小組討論，小組討論前會先安排獨立完成的時間，讓學生先進行獨立思考，再進行小組討論，鼓勵他們提出問題、分析問題，並合作尋找解決問題的方法。堂上完成的練習題有不會的先問組長，組長解決不了再由組長舉手尋找老師提供解決問題的提示。

在教學過程中強調學生的探索與參與，例如讓學生經歷勾股定理的探索和證明過程。教案中安排了對勾股定理的觀察、計算、猜想、證明及簡單應用的過程，這些設計不僅讓學生主動參與，還能夠激發他們的學習興趣。通過經歷勾股定理的探索和證明過程，學生能夠在實踐中理解數學概念，增強他們的邏輯推理能力和幾何直觀感受。這種方法符合生本教學的實踐性特點，讓學生在“做中學”。鼓勵他們自行發現和解決問題，從而真正成為學習的主體。學生將運用勾股定理解決一些簡單的實際問題，能夠幫助學生理解和應用知識，同時提升他們的應用意識。通過先探求特殊的直角三角形的三邊關係，再探求一般直角三角形的三邊關係，培養學生總結規律的能力，體現了生本教學重視學生思維發展和能力培養的核心理念。引導學生從特殊到一般的研究思路，使他們在解決問題的過程中逐漸培養出自主學習的能力。通過自主探索和學習，學生能夠逐漸形成系統的數學思維，提高他們解決複雜問題的能力。

（二）遊戲化教學

利用“柯南偵探團”的競選遊戲進行遊戲化教學，對勾股定理的深入研究和探索，有效提升學生的學習興趣和積極性，幫助他們理解數學概念，培養解決問題的能力。知識點逐層深入展開。運用“柯南偵探團”中的推理和解謎機制，讓學生在遊戲中探尋勾股定理的奧秘。學生作為偵探需要通過勾股定理來破解案件，通過計算直角三角形的邊長關係來找到線索，最終解開謎題。

這種遊戲化的教學方式不僅能夠提升學生的參與感，還能夠在實踐中加深他們對勾股定理的理解，同時培養他們的問題解決能力和邏輯思維能力。同時，也可以為學生提供一個輕鬆有趣的學習環境，讓他們在互動中自然掌握數學知識，應用於實際問題中，從而實現教學目標。

通過這樣的設計，教學活動不僅能達到本教案的學習目標，例如掌握勾股定理、理解其在實際中的應用等，而且增加了課程的趣味性，使學習過程更加生動活潑。表現優異的小組頒發“偵探證書”，增強參與感。

（三）資訊科技

在教學過程中，通過 *Kahoot*！教學平臺進行課堂反饋，利用遊戲化教學、師徒個別討論、小組合作和展示等多種教學形式，可以讓學生更加積極參與課堂。透過這種互動式的教學方式，學生不僅可以在遊戲中學習知識，還能夠培養他們的解題能力和合作精神。同時，可以及時獲取學生的學習情況，為課堂教學提供及時的反饋和調整教學策略，加深學生

對知識的理解和掌握。通過引導學生回答問題、引入競選遊戲等活動,讓學生在遊戲化的環境中更深入地研究和探索勾股定理,從而有效提升他們的學習興趣和積極性,幫助他們理解數學概念。因此,*Kahoot*! 在教學中的運用可以使教學更加互動和富有趣味,促進學生的主動學習,提高教學效果。另外,教案中還使用了 *GeoGebra* 進行課堂活動,透過這個數學繪圖工具,可以讓學生直觀地感受數學概念,讓抽象的數學概念變得更具體,幫助他們更好地理解抽象的數學知識。通過實際操作和視覺化展示,學生可以更深入地掌握勾股定理及其應用,提高他們的學習效果和理解水平。同時根據學生在 *GeoGebra* 上的操作情況,及時給予指導和幫助,個性化地指導學生。

在實踐過程中,這些資訊科技應用帶來了明顯的成效。通過引導學生參與課堂活動,讓他們更積極地學習勾股定理相關知識,並將知識應用到日常生活和實際問題中。同時,資訊科技的運用也使得教師更容易掌握學生的學習情況,及時調整教學方法,幫助學生達到更好的學習效果。同時,也能夠更有效地了解和指導學生,提高教學效率。這種資訊科技應用在數學教學中具有重要價值,值得進一步推廣和應用。

二、教學背景分析

進行教學背景分析的主要原因在於,它能夠為教師的教學活動提供必要的支撐和指導,有助於教師識別學生已有的知識水平和技能,可以揭示學生對某個概念的理解程度及興趣點。通過觀察和分析,以往的學習經驗以及學生在學習過程中遇到的困難,教師能更準確地調整目標,確保教學的有效性和針對性。教師可以選擇適合的教學策略和工具,設計出更具吸引力的教學活動,以提高學生的學習興趣,滿足不同學生的學習需求。

(一)學生學情分析

學生已經學習了關於三角形的一些基本知識,能辨別直角、銳角、鈍角三角形,能說出直角三角形的基本概念和性質。能化簡二次根式。之前經歷過自主學習、小組合作探究方式等得結論的過程,具備一定的活動經驗及動手能力,但分析歸納能力和推理能力較弱。本教學班的學生數學基礎較弱,只有個別學生較好,故對證明勾股定理可能會產生一定的困難。

(二)教材分析

本章所研究的勾股定理是直角三角形的非常重要的性質,有極其廣泛的應用。勾股定理指出了直角三角形三邊之間的數量關係,這就搭建起了幾何圖形與數量關係之間的一座材梁。勾股定理不僅是平面幾何中重要的定理,還是三角學、解析幾何學、微積分學中的基礎理論,此定理對現代數學的發展也產生了重要而深遠的影響。沒有勾股定理,就難以建立起整個數學的大廈。所以,勾股定理不僅被認為是平面幾何中最重要的定理之一,也被

認為是數學中最重要的定理之一。勾股定理的逆定理是判定直角三角形的一種方法。勾股定理及其逆定理從相反的路徑對直角三角形進行了研究。

本單元分為兩節,第一節介紹勾股定理及其應用,第二節介紹勾股定理的逆定理及其應用。在第 17. 1 節中,本節課主要安排了對勾股定理的觀察、計算、猜想、證明及簡單應用的過程,把三角形有一個直角的“形” 的特點轉化為三邊之間的“數” 的關係,是數形結合的典範,把探求邊的關係轉化為探求面積的關係是轉化思想的體現,先探求特殊的直角三角形的三邊關係,再探求一般直角三角形的三邊關係,這是從特殊到一般的思想。這樣安排有利於學生認識結論研究的必要性,培養學生的學習興趣,培養學生發現、提出、分析和解決問題的能力。在第 17. 2 節中,主要內容是從畫圖猜想到借助勾股定理及全等三角形來證明,從而得到了勾股定理的逆定理。勾股定理的逆定理是判定一個三角形是直角三角形的重要依據。之後安排兩個例題運用這個定理,並穿插了逆命題、逆定理的概念及相應的配套練習和習題。

(三)教學目標與重難點分析

1. 教學目標

（1）探索勾股定理及其逆定理,知道這兩個定理的區別和聯繫,能用這兩個定理解決一些簡單的實際問題,發展應用意識、創新意識。

（2）經歷勾股定理及其逆定理的探索和證明過程,感悟從特殊到一般的研究問題的方法,體會數形結合、轉化的數學思想,發展抽象能力、幾何直觀和推理能力。

（3）通過具體的例子,了解逆命題、逆定理的概念,會識別兩個互逆的命題,知道原命題成立時其逆命題不一定成立。

（4）了解勾股定理的相關歷史 ,感受數學文化,提高學學生習數學的興趣,增強愛國情懷和民族自豪感。

2. 單元學習的重點:勾股定理、勾股定理的逆定理及應用。

3. 單元學習的難點:勾股定理及逆定理的探索及證明。

三、教學實施

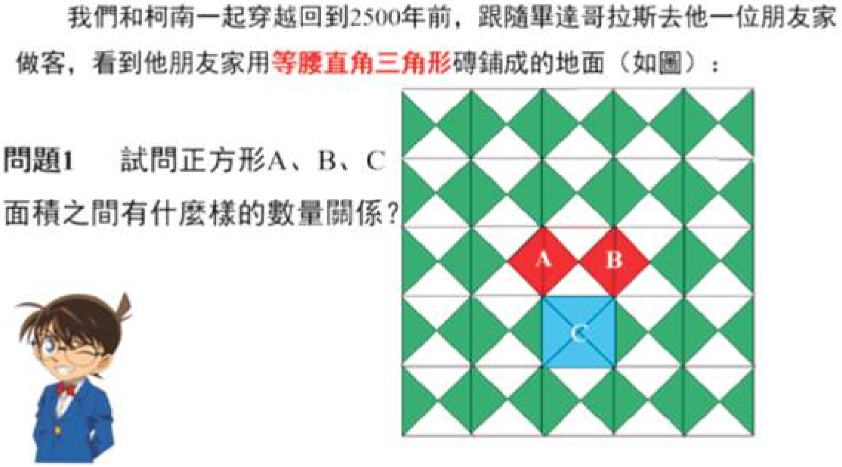
【活動 1:知識回顧】

利用 *Kahoot*! 分組進行直角三角形的知識回顧。利用競賽遊戲提升課堂氣氛,通過遊戲回顧三角形的相關知識,同時吸引學生的注意力,激發學生求知欲,結果能有效地回饋本節學生的學習成效,從而調整本節課進度。

【活動 2:創設情境】

柯南來到學校選少年偵探團,接受柯南考驗之前,要先獲得「勾股定理」技能。穿越回到 2500 年前,跟隨畢達哥拉斯再去他一位朋友家做客,看到他朋友家用等腰直角三角形磚

鋪成的地面(如圖):



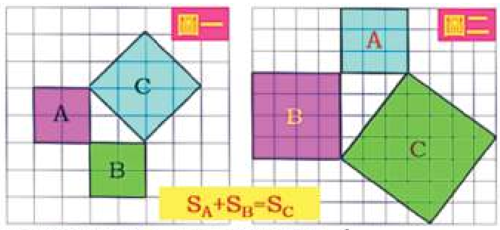
問題 1:試問正方形 A、B、C 面積之間有什麼的數量關係?

學生獨立觀察圖形,分析、思考其中隱含的規律,教師引導學生直接由正方形面積等於邊長的平方,歸納猜想出結論。從最特殊的等腰直角三角形入手,通過觀察正方形面積關係得到三邊關係,並進行初步的一般化,發展學生的幾何直觀。

【活動 3:新課引入】

問題 2:圖中正方形 A、B、C 所圍成的等腰直角三角形三邊之間有什麼特殊關係?

猜想 1:在等腰直角三角形中,直角邊的平方 + 另一條直角邊的平方 = 斜邊的平方



圖中，小方格的邊長為1，則小方格面積為 1 。

	A的面積	B的面積	C的面積
圖一	4	4	8
圖二	9	16	25

猜想 2:對於**一般的直角三角形**中,________ + ________ = ________

得出猜想:如果**直角三角形**兩直角邊分別為 a、b,斜邊為 c,那麼 ________。

網格中的直角三角形也是直角三角形一種特殊情況,進一步體會面積割補法,為探究無網格背景下直角三角形三邊關係打下基礎,提供方法。

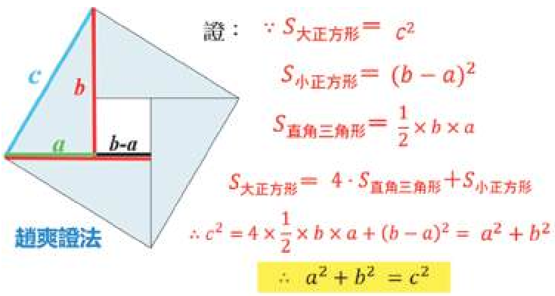
【活動 4:拼圖遊戲】

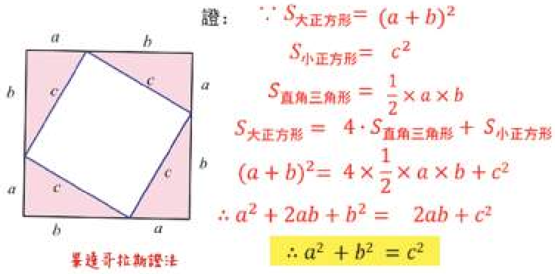
1. 學生嘗試用用四個直角三角形(全等的) 拼出一個正方形,並就拼出的圖說明 $a^2 + b^2 = c^2$。

2. 通過拼圖活動,調動學生思維的積極性,為學生提供從事數學活動的機會,發展學生

的形象思維,促進學生探究能力的發展。課堂中形成人人參與、互幫互助的課堂氛圍。

【活動 5:證明猜想】





學生對圖形進行割補,列代數式推理驗證,經歷由數到形、再到數的推理過程,滲透數形結合思想。培養學生的觀察能力和探究問題的能力,以及交流表達能力,發展學生的推理能力,體現學生是學習的主體。

【活動 6:得出結論】

得出結論並利用 *GeoGebra* 進行驗證。借助現代信息技術直觀地驗證猜想,化抽象為具體,讓幾何證明更加豐富有趣。

【活動 7:拓展新知】

播放勾股定理的相關知識。介紹勾股定理的歷史,感受數學文化,激發學習興趣和民族自豪感,同時推動本澳"閱讀之城",提升數學核心素養。

【活動 8:鞏固練習】

1. 教師提出問題,學生獨立思考後與小組同學討論,教師巡視。小組完成題目,並把答案填在密碼紙上,完成後交給老師,全班完成後,抽取小組上臺講解練習,完成講解後全班一起核對每組密碼。

2. 主要考查在直角三角形中,已知兩邊求第三邊。解題時,關鍵是要分清要求的是斜邊還是直角邊。在練習中,學生可以應用他們所學的知識和技能來解決問題,並獲得即時的反饋。這有助於學生發現和修正他們的錯誤,並進一步提升他們的解題能力,通過實際生活的應用,感受數學來源於生活,服務於生活。

【活動 9:課堂小結】

1. 教師利用提問的方式引導學生做出總結。讓學生暢所欲言本節課的收穫,小結本節課的學習知識點。利用思維導圖,對事件的分類進行系統的描述與整理,加強知識之間的

聯繫及應用，內化知識。

2. 公佈獲得柯南少年偵探團的組別。

【活動 10：佈置作業】

1. 必做題：書 *P*. 28 習題 17. 1 第 1、3、8 題；

2. 選做題：了解勾股樹，並嘗試利用幾何畫板 /*GeoGebra* 製作勾股樹；嘗試運用其他方法證明勾股定理。

3. 課後思考：在日常生活中如何使用勾股定理？

四、學習成果展示

學生能理解並掌握勾股定理的內容，能夠運用該定理解決一些基本的幾何問題。通過探究和證明勾股定理的過程，學生將能體驗到從特殊到一般的研究方法，以及如何將圖形與數字結合。他們的抽象思維能力、幾何直觀以及推理能力也會隨之發展。學生在課程中將了解勾股定理的歷史背景，這不僅有助於提升他們對數學文化的理解，同時也會增強他們的民族自豪感。通過動手操作、觀察、分析和小組討論，學生的觀察能力和探究問題的能力將會有所提升。這種合作學習的方式能夠促進學生之間的交流與表達能力。在課程的實施中，學生將通過對勾股定理的應用進行簡單問題的解決，從而增強他們解決實際問題的能力。通過探究活動，培養動手、動腦的習慣及實踐能力和創新精神，學生能自主完成創意任務：（1）利用幾何畫板 /*GeoGebra* 製作勾股樹；（2）勾股定理的證明。

五、教學反思與評價

根據學生的年齡特點設置遊戲化教學，利用破案的方式吸引學生注意力，亦採用多樣化的教學方式，例如：引導學生回答問題、師徒個別討論、小組合作和展示、學生獨立操作等多種教學形式，能有效提升學生的課堂參與度及學習興趣，效果如理想，課堂參與度較好。通過讓學生了解勾股定理的歷史及文化背景，引導學生更深入地感受數學文化，激發學習興趣和民族自豪感。課堂中亦運用 *Kahoot*！ 及 *GeoGebra* 資訊科技進行課堂活動，可以及時了解學生的學習情況，調整教學策略，幫助學生加深理解和掌握知識。普遍學生均能完成練習，僅有少部分題目未完全正確，已在課後留下未掌握的學生作補底。在每節課堂結束時進行課堂總結，讓學生自由表達本節課的收穫，幫助他們鞏固所學知識點，加深理解。

在後期可添加實地測量，在校園內選擇一些區域，學生可以使用測量工具（如卷尺）測量不同的邊長，形成多個直角三角形，然後應用勾股定理計算斜邊的長度。這個過程可以通過模擬柯南的調查行為，讓學生在實際應用中加深對定理的理解。教師亦可以通過定期與學生進行交談，了解他們對教學內容的理解和反饋。同時，教師可以針對學生的學習情況和反饋意見，調整教學方法和內容，促進學生的學習和發展。學生的練習和討論中，應及

時給予學生反饋,幫助他們發現和糾正錯誤,從而提升他們的解題能力和學習效果。此外,教師也應該不斷學習和更新教學知識,提升自身的教學水平,以更好地指導學生。

參考文獻:

1、中華人民共和國教育部(2016). 中國學生發展核心素養(徵求意見稿). 中國教育報.

2、澳門教育及青年發展局(2015). 本地學制正規教育基本學力要求. 澳門政府公報, 29/2015. 580 - 583.

3、澳門教育及青年發展局(2017). 初中教育階段數學基本學力要求. 澳門政府公報, 26/2017. 634 - 724.

“探”其本質,“究”于素養

—— 人民幣的面值為何只有 1、2、5、10?

重慶市渝中區馬家堡小學

楊燕

【摘要】探究性學習是一種以學生為中心的教學,學生在教師的引導下,動手操作、動腦思考解決數學問題,並逐漸獲得探究知識的方法和學習途徑。小學低年級學生對於新奇的數學世界同樣有著強烈的探索欲望,筆者結合該年段學生學習特點,開展了探究身邊的數學世界活動 —— 人民幣的面值為何只有 1、2、5、10? 學生經歷發現問題、提出問題、分析問題、解決問題的過程,極大地激發了學生數學學習的興趣,有效提升學生的數學素養。

【關鍵字】小學數學;探究性學習;人民幣的面值

數學課程要培養學生的核心素養,其中一方面便是用數學的眼光觀察現實世界。數學為人們提供了一種認識與探究現實世界的觀察方式,學生能夠在實際情境中發現和提出有意義的數學問題,進行數學探究,逐步養成從數學角度觀察現實世界的意識與習慣,發展好奇心、想像力和創新意識。[1] 通過對人民幣相關知識的學習,引導學生發現值得探究的問題,並以此為任務導向,驅動學生結合生活經驗、查驗資料等方式探究問題,最終獲得問題解決的途徑,數學素養得以發展。

一、創設問題情境,激發學生探究意識

數學來源於生活。生活中處處蘊含著與數學相關的問題,只要有一雙善於發現的眼睛,便能將問題和教學有效結合起來,激發學生思考,延伸學生數學思維,促進長足學習動力。在此之前,學生能提出有價值的問題是開展有效探究的第一步,沒有問題的發現也就談不上對問題的探究。而問題的產生與學生的生活經驗息息相關。小學階段的學生思維正處於具體形象性發展過程、抽象邏輯思維形成時期。因此,教師需要研讀教材,把握真實問題與數學知識之間的內在聯繫,精心設計教學環節,在教學過程中應該以趣味化為主導,為學生創設符合該階段學生認知特點的問題情境,引導學生主動參與、積極動腦,提高探究性問題意識。人民幣在現實生活中起著重要的作用,在單元教學中僅占3課時,但卻是學生

第一次接觸學習“量與計量” 知識,其數學思維經驗的積累將為今後繼續學習“量與計量”奠定基礎。課堂中通過人民幣的歷史演變讓學生了解數學文化,產生學習欲望。

教學過程片段一:

小朋友們,你們知道錢是怎麼來的嗎? 在很久很久以前,人們還沒有錢的概念。張三養羊,李四養雞,李四看上張三的羊,想用一隻雞換一頭羊,但張三不同意,他覺得自己虧了,或者他其實想要的是一把斧頭,所以斧頭就被當做過貨幣,糧食牲畜都被當作過貨幣,這就是當時的物物交易。可是後來人們發現糧食易變質,遇到需要找零時,動物又不能切分,可真是愁人啊!

那有沒有一種物品可以讓所有人都可以使用來交換自己所需的東西呢?

就這樣稀缺而珍貴的貝殼經過加工被製作成為貝幣,方便攜帶,方便計數,不容易變質,在當時堪稱完美。

可貝幣為什麼後來也被取代了呢?

隨著人類活動和交易的範圍不斷擴大,大量貝幣被製造出來,而時常商品的增長相對緩慢,於是貝幣大幅貶值,比如說之前三個貝幣就能換一隻小兔子,現在卻需要三百個甚至更多的貝幣。這時候就出現了金屬貨幣,世界上最早的金屬貨幣是我國商朝的銅貝,金銀銅等金屬成為新一般等價物,人們開始使用新的貨幣。隨著交易範圍的擴大,金屬貨幣過於笨重不便攜帶,於是智慧的北宋人發明了世界上最早的紙幣——交子。紙幣一時間就成了全球流通幣的主要載體。

我們現在所使用的人民幣也經歷了很長一段時間的演變,截至目前,央行共發行了五套人民幣。隨著科技互聯網發展,經濟全球化,數位貨幣及電子支付應運而生,只需掃碼就可支付,又快又方便。不管時代怎麼發展,貨幣形式怎麼改變,唯一不變的是讓傳統支付更加便捷,生活更加便利。

現實生活中,學生對於人民幣的認識少之又少,由於電子支付的方便快捷,學生使用人民幣的機會都明顯不足。在探究活動中,通過問題情境引入,讓學生了解人民幣的演變過程,學生有了初步的認識,才能有深入了解探索的欲望,在情境中積極主動獲取知識。

二、小組合作交流,有效促進任務驅動

學生面對新問題可能無從下手,教師應引導他們進行小組合作交流,讓他們將自己的想法在組內勇敢表達出來,既有參與感,又有貢獻力,無論大小。通過這種方式,可以提高學生思維水準,還能培養獨立思考、互幫互助的良好學習習慣。因此,教師也應給與學生充分的討論時間,讓學生在相對寬鬆的環境下暢所欲言。

教學過程片段二:

生:了解了人民幣的相關知識後,我通過觀察人民幣上的數位和單位,認識了不同面值的人民幣。

師:這麼多人民幣,你會給它們分分類嗎?

生:我按照人民幣的材質來分,分為硬幣和紙幣;

我按照人民幣的單位來分,分為:元、角、分;

我還有不同的想法:我把人民幣按照數字來分,比如:1 角、1 元、10 元、100 元分為一類,2 角、2 元、20 元分為一類,5 角、5 元、50 元分為一類。

師:你們覺得這種分類方式怎麼樣?

生:老師,我想起一個問題,為什麼人民幣的面值只有 1、2、5、10 卻沒有 3、4、6、7、8、9 呢?

師:你提的這個問題真有價值! 也許經歷了人民幣的使用過程,你便能慢慢發現其中的奧秘!

問題的產生是探究學習的良好開端。在以往的教學案例中,關於人民幣的分類一般都是按單位或者材質兩種標準來區分,課堂上學生發表了如此特別的分類方法,還能勇敢地表達,不怕被質疑,教師要給予充分肯定。學習就是在差異化的思維中不斷推進,如果每個人的想法都禁錮在已有答案中,學生的數學思維不但無法激發,還會毫無創新可言,這樣的學習缺乏生機。在教學中,教師循循善誘,對學生有意識地進行有效指導,抓住課堂有價值地生成,幫助學生發散思維,提升學生發現問題、提出問題的能力。

通過對人民幣相關知識的了解,為學生新知探索與進一步發展搭建了良好的"腳手架",學生在思維碰撞出提出新問題:"為什麼人民幣的面值只有 1、2、5、10 四種面值?"一個全新的問題擺在面前,教師不能急於告知他們答案,而是引導學生體驗人民幣的使用過程,在探索中慢慢揭開問題的真相。學生在原有認知結構無法完成新的任務時,必然產生探究欲望,溝通新舊知識間的聯繫,啟迪學生思維。

三、積極嘗試探索,初步分析可能因素

小學生的個體差異明顯,面對這樣的問題不免會覺無從下手,產生挫敗感。教師在此過程中要充分考慮學生實際的理解能力和認知水準,從學生實際情況入手,提供一定的問題解決支架 ,注意管控好"度",既不能直接提供解決問題的思路,讓學生毫無挑戰可言,又不能出現方向偏差。《小學數學課程標準》指出:有效的數學學習活動不能單純地依賴模仿與記憶,教師應向學生充分提供從事學習數學活動的機會,通過動手實踐、探索與合作交流等方式使學生更好地學習數學知識。

因此,在探究過程中,給與學生充分的時間與空間去實際體驗人民幣的使用過程,與家

長進行貨幣兌換過程,親身感悟,再分析嘗試得出一定的結論。每個學生的驗證過程不一樣,其中有幾名學生在家長的帶領下進行了真實的物品買賣活動,體驗更為真切。

教學過程片段三:

寒假期間,我和班裡的小夥伴一起組織了年貨小超市活動,我們以批發價格購買了一批年貨,再以合理的價格銷售。

媽媽陪我去市場進貨,春聯 12 元,窗花 2 元,福字 10 元;我去售賣時,價格定為:春聯 15 元,窗花 4 元,福字 15 元。在原有價格基礎上有一定提高,這樣下來,我賺回了成本,還多了 10 元。人民幣就是通過買和賣在生活中流通,人們的衣食住行都離不開它的使用。

生:你們的活動可真有趣! 我也進行了人民幣購物體驗活動。我想買一個3元的髮夾,可以怎樣付錢呢? 你能想出多少種合適的付錢方法呢?

考慮到實際情況,目前市面上流通的 2 元紙幣極少,所以在下面的討論中,支付數額較少時,沒有考慮直接支付兩元紙幣的情況,而是由其他數額湊成。

金額 方法	5 角	1 元	5 元	10 元
1	6 張			
2	4 張	1 張		
3	2 張	2 張		
4	2 張			
5		3 張		

如果是 6 元的巧克力呢? 又可以怎樣付錢?

金額 方法	5 角	1 元	5 元	10 元
1	12 張			
2	10 張	1 張		
3	8 張	2 張		
4	6 張	3 張		
5	4 張	4 張		
6	2 張	5 張		
7		6 張		
8		1 張	1 張	

付錢的方式有很多,我們在使用時儘量選擇更為簡便的支付方式。想要更便捷,為什麼不把每種面額的幣值都發行一種呢? 是不是面額越多越好呢?

一個問題的解決過程中孕育了新問題的產生,兩個問題間是毫無關係還是有著莫大的關聯呢? 探究的意義莫不是就此體現出來,學生已然萌發出"問題意識",主動成為問題的

發現者,激發無限求知欲。學生能主動去思考分析問題、解決問題,逐步學會從數學的角度提出問題、理解問題。結合生活實際,用小學生的思維思考,每一種貨幣都發行一種就不用找補零錢,會不會更方便呢? 他們接下來又會如何驗證?

在培養學生解決實際問題的過程中,作為數學教師,我們的教學思想以及課堂設計都是圍繞數學問題開展的,結合學生的整體學習活動展開針對性的教學指導。保障學生的課堂主體性地位,提高學生課堂學習積極性,學生興趣使然,能夠集中學習注意力,進而保障數學教學活動的高效開展,改變學生對傳統數學課堂的認知和理解,感受自主探索數學知識的魅力與意義,逐漸獲得核心素養的有效提升。[2]

四、對比驗證結論,收穫解決問題成果

"引導學生自己去發現" 是一種指導我們的教學理念,引導學生發現問題、發現數學規律、發現解決問題的方法,讓發現貫穿于學生的學習過程之中。學生的潛力是巨大的,在問題將解未解之時,新方法新思路讓學生們有了探究新方向。學生的數學學習過程通常應該伴隨著思維的不斷優化。思考是學生數學學習中的核心和主線,要讓他們在積極的思考中學會思考。[3]

教學過程片段四:

事實上,面額越多,國家發行貨幣時成本更大,人們支付、收納都會麻煩許多。

這樣一說,我明白了! 我看到過超市的收銀員阿姨分類整理這些錢幣,收取很方便。

可是為什麼是 1、2、5、10 這些面值呢? 如果將其中任意一個數換成 3、4、6、7、8、9,會出現什麼情況呢?

例：

(1)2、3、5、10

1	4	6	7	8	9
3 − 2 = 1	2 + 2 = 4	3 + 3 = 6	5 + 2 = 7	5 + 3 = 8	5 + 2 + 2 = 9

(2)1、4、5、10

2	3	6	7	8	9
1 + 1 = 2	4 − 1 = 3	5 + 1 = 6	5 + 1 + 1 = 7	4 + 4 = 8	10 − 1 = 9

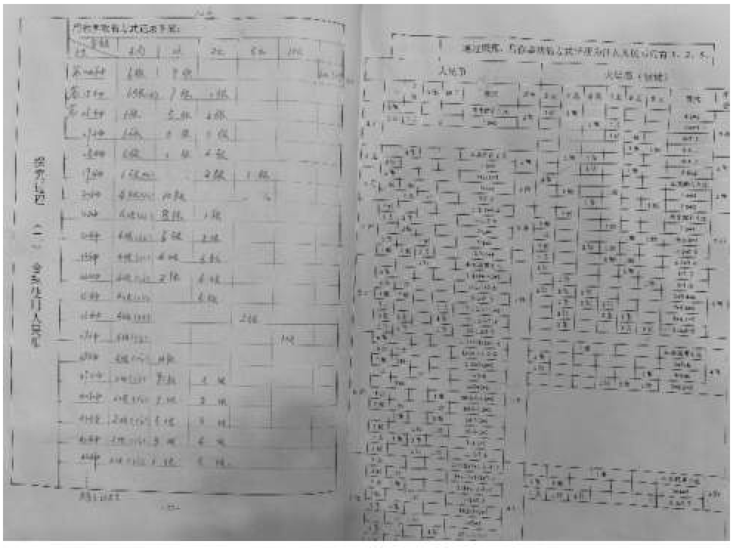
(3)1、2、3、10

4	5	6	7	8	9
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	1 + 2 + 3 = 6	10 − 3 = 7	10 − 2 = 8	10 − 1 = 9

(4)1、2、5、6

3	4	7	8	9	10
1 + 2 = 3	6 − 2 = 4	1 + 6 = 7	6 + 2 = 8	1 + 1 + 2 + 5 = 9	6 + 2 + 2 + 1 = 10

通過思維啟發、方法引領，我們在課堂上進行了簡單驗證，學生們有了新思路。通過以上驗證發現，如果將其中一個數換成其他數，有些數會出現兩次以上加減才能湊出，在日常生活中使用會更加麻煩。事實上，在獨立探究階段，就有學生在利用火星幣（假設），發現了1、2、5、10 支付的方法多樣性，而 3、4、6、7、8、9 幣值種類雖多，但在實際支付中方法較少，使用麻煩。以下是該學生的探究驗證過程。



一年級學生能夠循著探究的問題，經歷體驗、嘗試、驗證的過程，最終揭秘問題的答案，我想，這便是探究性學習帶來的巨大影響力。總有一股動力推動著我們一層一層揭開問題的面紗，最終識得廬山眞面目，有效地幫助學生樹立解決問題的信心，在問題引領下發展創新性思維，促進核心素養的達成。

新課程標準指出："數學為人們提供了一種理解與解釋現實世界的思考方式。" 學生

通過數學的思維,能夠合乎邏輯地解釋或論證數學問題,分析、解決簡單的實際問題,逐步形成理性精神。[4] 關於人民幣面值的問題,任何一版數學教材都未曾單獨羅列出來探究原因,很多成年人也未必知曉全貌。在一年級學生初次接觸人民幣的契機之下,給予學生充足的機會去現問題發現問題、提出問題,讓問題意識從小萌生,無形中教會學生用數學的眼光觀察現實世界,用數學的思維思考現實世界,關注學生核心素養形成。

小學是學生數學思維和創新思維發展的重要階段。在小學階段開展數學探究性學習,能夠從小幫助學生奠定良好的學習思維基礎。在教學過程中,教師應充分尊重學生的主體地位,保護學生的好奇心,鼓勵學生衝破思維的藩籬,勇於質疑並提出問題,敢於躬身努力探究,始終秉承對學習的熱情和自信。

參考文獻:

[1] 教育部. 義務教育數學課程標準(2022 年版)[M]. 北京:北京師範大學出版社,2022.

[2] 吳順田. 基於核心素養的小學數學解決問題教學研究[J]. 亞太教育,2022,(14):54 - 56.

[3] 周秋英. 始于探究 達于素養 —— 小學數學探究性學習例談[J]. 小學數學教育,2021,(22):21 - 22 + 24.

[4] 教育部. 義務教育數學課程標準(2022 年版)[M]. 北京:北京師範大學出版社,2022.

數形結合在不等式問題中的妙用

澳門勞校中學高二學生　劉源

（指導老師　魏均僑）

數形結合法是一種奇妙的解題技巧,它可以讓我們用平面幾何的直觀方式來理解並解決一些抽象的代數問題。數形結合的關鍵是把數學符號和幾何圖像相互對應,把抽象問題具體化,從而簡化解題過程,因此數形結合在一些複雜的不等式問題中尤其有用,它可以讓我們發現一些意想不到的規律和關係。本文將介紹幾類與不等式相關的數形結合解法,並與代數解法作出比較。

一、$\frac{y-b}{x-a}$ 型問題

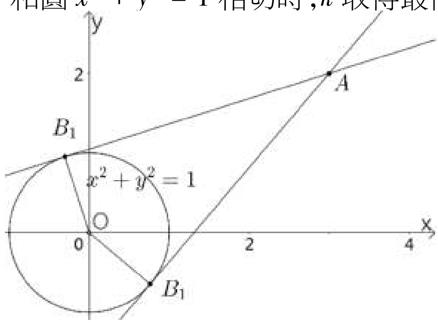
斜率計算是高中課程的解析幾何直綫中常見的問題,若在不等式中出現$\frac{y-b}{x-a}$,可以化為兩點所在直綫的斜率的最值來求解。

問題 1. 求函數 $y=\frac{3-sinx}{2+cosx}$ 的值域。

[**分析**] 若使用數形結合法,可以將$\frac{3-sinx}{2+cosx}$看成$A(2,3)$和點$B(-cosx,sinx)$所成直線的斜率,其中點 B 在單位圓上,觀察可知直線 AB 和單位圓相切時取得最值。若使用代數方法,我們可以化爲三角等式,再用輔助角公式來求值域。

解法 1(**數形結合**):設$A(2,3)$,$B(-cos\alpha,sin\alpha)$,k 為直綫 AB 的斜率,B 為圓 $x^2+y^2=1$ 上的點, 則 $l_{AB}:kx-y-2k+3=0$。

如下圖所示,當直線 AB 和圓 $x^2+y^2=1$ 相切時,k 取得最值, 此時



$$\frac{|2k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=1$$

$$3k^2-12k+8=0$$

$$k_1=\frac{6-2\sqrt{3}}{3},k_2=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

綜上,$y=\frac{3-sinx}{2+cosx}$的值域為$\left[\frac{6-2\sqrt{3}}{3},\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

解法 2(代數):由 $y=\frac{3-sinx}{2+cosx}$有,$ycosx+sinx=3-2y$.

由輔助角公式,得

$$-\sqrt{1+y^2}\le ycosx+sinx=3-2y\le\sqrt{1+y^2}$$

$$(3-2y)^2\le 1+y^2$$

$$3y^2-12y^2+8\le 0$$

$$\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\le y\le\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

綜上所述, $y=\frac{3-sinx}{2+cosx}$的值域為$\left[\frac{6-2\sqrt{3}}{3},\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

由上可見,雖然兩種解法最後得到的不等式相同,但代數方法需要通過輔助角公式對式子進行恆等變換,而數形結合只需要使用點到直綫的距離公式。數形結合可以從直觀的幾何圖像更直接地找出關係式。

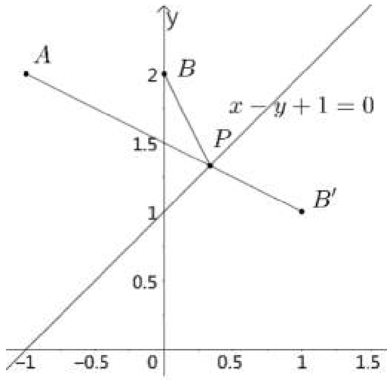
二、$\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^2+(\mathrm{y}-\mathrm{b})^2}$ 型問題

兩點間距離公式是高中數學最常見公式之一,若在不等式中出現$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$,可以先化為兩點的距離,再化簡求最值。

問題 2. 已知 x,y 滿足 $y=x+1$,求$\sqrt{x^2+2x+y^2-4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-4y+4}$ 的最小值。

[**分析**] 若使用數形結合的方法, 我們可以把原式化簡成$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}$,那麼問題轉化成求直綫 $x-y+1=0$ 上一點 $P(x,y)$ 到 $A(-1,2)$ 和 $B(0,2)$ 的距離之和的最小值。若使用代數方法,我們可以把 $y=x+1$ 代入原式,再轉化為計算一元函數最值的問題。

解法 1(數形結合):如下圖, 令點 $P(x,y)$,$A(-1,2)$,$B(0,2)$, 則$\sqrt{x^2+2x+y^2-4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-4y+4}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=|PA|+|PB|$。



如上圖所示,作點 $B(0,2)$ 關於直線 $x-y+1=0$ 的對稱點 $B'(1,1)$,則

$$|PA|+|PB|=|PA|+|PB'|\geq|AB'|=\sqrt{(-1-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

當且僅當 A,P,B' 三點共線時, 即$(x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$時不等式取得等號.

解法 2(代數):把 $y=x+1$ 代入原式,

得$\sqrt{x^2+2x+y^2-4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-4y+4}=\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{2x^2-2x+1}$

令$f(x)=\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{2x^2-2x+1}$,

則$f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{2x^2-2x+1}+(2x-1)\sqrt{2x^2+2}}{\sqrt{2x^2+2}\sqrt{2x^2-2x+1}}$

再令$f'(x)=0$, 解得 $6x^2-8x+2=0$.

又$f'(1)\neq 0$, 所以 $x=\frac{1}{3}$.

當 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ 時, 易得$\dfrac{2x\sqrt{2x^2-2x+1}}{\sqrt{2x^2+2}\sqrt{2x^2-2x+1}}\leq\dfrac{-(2x-1)\sqrt{2x^2+2}}{\sqrt{2x^2+2}\sqrt{2x^2-2x+1}}$, 即 $f'(x)\leq 0$;

當 $x\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ 時, 易得$\dfrac{2x\sqrt{2x^2-2x+1}}{\sqrt{2x^2+2}\sqrt{2x^2-2x+1}}\geq\dfrac{-(2x-1)\sqrt{2x^2+2}}{\sqrt{2x^2+2}\sqrt{2x^2-2x+1}}$, 即 $f'(x)\geq 0$,

則$f(x)\geq f\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{5}$

綜上所述, 原式的最小值為$\sqrt{5}$, 當且僅當$(x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$時原式取得等號.

由上可見,代數方法的計算量遠大於數形結合方法,數形結合可以利用幾何圖像更直觀地找出最值。

三、已知 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，求 $ax+by$ 的最值問題

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 是二次曲線的方程，而 $ax+by-z=0$ 表示的是一條直線，因為直線 $ax+by-z=0$ 和 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 必有交點。觀察可見，當直線 $ax+by-z=0$ 和 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 相切時，z 取得最值，因此我們只需求出相切時的 z 值。

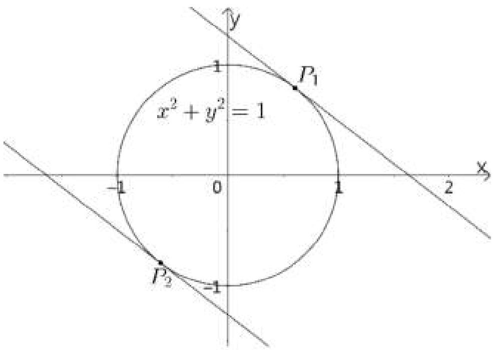
問題 3. 已知 a,b 滿足 $3a^2+4b^2-12=0$，求 $2a+3b$ 的最小值和最大值。

［**分析**］若使用數形結合的方法，可以設 $a=2m,b=\sqrt{3}n$，則 $m^2+n^2=1$。此時，原題變為求圓的切線問題。

若使用代數方法，可以用三角換元將題目化成一元函數求最值問題。

解法 1（**數形結合**）：$a=2m,b=\sqrt{3}n$，則 $m^2+n^2=1$.

設 $k=2a+3b=4m+3\sqrt{3}n$，



如上圖，點 $P(m,n)$ 是圓 $x^2+y^2=3$ 和直線 $4x+3\sqrt{3}y-k=0$ 的交點.

觀察可見，當 $4x+3\sqrt{3}y-k=0$ 和圓 $x^2+y^2=3$ 相切時，k 取得最值.

此時 $\frac{|k|}{\sqrt{43}}=1$，解得，$k=\pm\sqrt{43}$.

當 $2a+3b$ 取得最小值時，$(a,b)=\left(-\frac{8\sqrt{43}}{43},-\frac{9\sqrt{43}}{43}\right)$.

當 $2a+3b$ 取得最大值時，$(a,b)=\left(\frac{8\sqrt{43}}{43},\frac{9\sqrt{43}}{43}\right)$.

綜上所述，$2a+3b$ 的最小值為 $-\sqrt{43}$，最大值為 $\sqrt{43}$.

解法 2（**代數**）：設 $a=2sin\theta,b=\sqrt{3}cos\theta$，

則 $2a+3b=4sin\theta+3\sqrt{3}cos\theta$，由輔助角公式，有

$$-\sqrt{43}\le 4sin\theta+3\sqrt{3}cos\theta=\sqrt{43}sin(\theta+\varphi)\le\sqrt{43}\ （其中\ tan\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{4}）$$

綜上所述，$2a+3b$ 的最小值為 $-\sqrt{43}$，最大值為 $\sqrt{43}$.

由上可見,數形結合可以省去複雜的三角運算,用直觀的幾何圖像找出代數關係式。

四、已知 ax + by + c = 0,求 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F$ 的最值問題

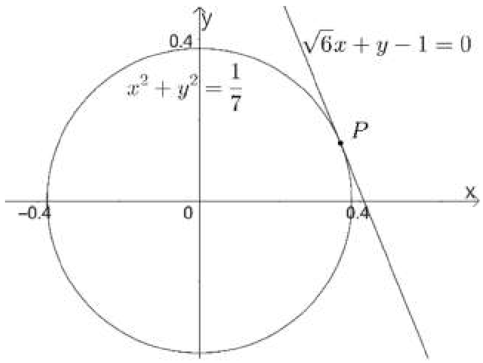
和上一個類型相似,我們只需求出直線 $ax + by + c = 0$ 和 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = z$ 相切時的 z 值。

問題 4. 已知 $a + b = 1$,求 $a^2 + 6b^2$ 的最小值。

[**分析**] 若使用數形結合的方法,可以設 $a = \sqrt{6}m, b = n$ 把原題變為求圓的切線問題。若使用代數方法,可以用平均值不等式或三角換元等方法化簡求最值。

解法 1(**數形結合**):設 $a = \sqrt{6}m, b = n$,則$\sqrt{6}m + n = 1$.

設 $r^2 = a^2 + 6b^2 = 6m^2 + 6n^2$. 如下圖,點 $P(m,n)$ 是圓 $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{6}$ 和直線$\sqrt{6}x + y - 1 = 0$ 的交點,觀察可知,$\sqrt{6}x + y - 1 = 0$ 和圓 $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{6}$ 相切時 r^2 取得最小值. 此時,$\frac{1}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{r^2}{6}}$,解得 $r^2 = \frac{6}{7}$.



綜上所述,$a^2 + 6b^2$ 的最小值為$\frac{6}{7}$,當且僅當$(a,b) = \left(\frac{6}{7},\frac{1}{7}\right)$時取得等號.

解法 2(**代數**):由平均值不等式,得:

$$\begin{aligned}
a^2 + 6b^2 &= a^2 + \frac{36}{49} + 6b^2 + \frac{6}{49} - \frac{6}{7} \\
&\geq 2\sqrt{\frac{36a^2}{49}} + 2\sqrt{\frac{36b^2}{49}} - \frac{6}{7} \\
&= \frac{12}{7}a + \frac{12}{7}b - \frac{6}{7} \\
&= \frac{6}{7}
\end{aligned}$$

當且僅當$(a,b)=\left(\frac{6}{7},\frac{1}{7}\right)$時取得等號.

由上可見,雖然數形結合法不比代數方法來得簡潔,但數形結合可以從幾何圖像中的圓和直線關係找出取得最值時滿足的關係式,而使用平均值不等式時配湊的係數需要通過待定係數法找出,這並不是容易的事。

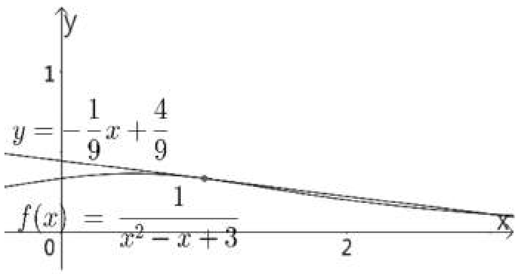
五、已知 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 的值,求 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ 的最值問題

對此類問題,我們可以參考上一個類型問題的解題方法。首先,題目從二次曲線變成了$f(x)$的函數圖像,若我們作這條曲線的切線且發現這條曲線必定有某部分全部在切線上方或下方,我們就可以通過証明局部不等式$f(x)\geq(\leq)px+q$來計算$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$的最值,這種方法稱為切線法。

問題 5. 設$a,b,c>0$,且$a+b+c=3$,證明:

$$\frac{1}{c^2+a+b}+\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}\leq 1。$$

[**分析**] 若使用切線法,可以令$f(x)=\frac{1}{x^2-x+3}-px-q(x\in[0,3])$,在所證的不等式中,我們觀察到取等條件為$a=b=c=1$,因此可作出$f(x)$在$x=1$處的切線(如下圖)來證明。



若使用代數方法,可以用 *Chebyshev* 不等式來求最值。*Chebyshev* 不等式的描述如下:

若數列$\{a_n\}$與$\{b_n\}$同序,則

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geq\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n),$$

若數列$\{a_n\}$與$\{b_n\}$反序,則

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leq\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)。$$

解法 1(**切線法**):不等式等價於

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+b+c}=\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+3}\leq 1$$

令$f(x)=\frac{1}{x^2-x+3}+\frac{1}{9}x-\frac{4}{9}(x\in[0,3])$, 則

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+3)^2-9(2x-1)}{9(x^2-x+3)^2}=\frac{x^4-2x^3+7x^2-24x+18}{9(x^2-x+3)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x^3-x^2+6x-18)}{9(x^2-x+3)^2}$$

令 $g(x)=x^3-x^2+6x-18(x\in[0,3])$，則 $g'(x)=3x^2-2x+6>0$，即 $g(x)$ 為增函數，而 $g(2)<0, g(3)>0$，因此 $g(x)$ 在 $[2,3]$ 必有一零點，不妨設 $g(c)=0$，則當 $x\in[0,1]$ 時，$f'(x)\geq 0, f(x)\leq f(1)=0$. 當 $x\in[1,c]$ 時，$f'(x)\leq 0, f(x)\leq f(1)=0$. 當 $x\in[c,3]$ 時，$f'(x)\geq 0, f(x)\leq f(3)=0$.

因此我們得到 $\frac{1}{x^2-x+3}\leq -\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}(x\in[0,3])$，即

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+3}\leq\sum_{cyc}\left(-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}\right)=1$$

綜上所述，不等式成立，當且僅當 $a=b=c=1$ 時不等式取得等號.

解法 2(代數)：不等式等價於

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+b+c}=\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+3}\leq 1$$

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a^2-a+3}-\frac{1}{3}\right)\leq 0$$

$$\sum_{cyc}\frac{1-a}{a-1+\frac{3}{a}}\leq 0$$

當 $a\geq b$ 時，$(a-1+\frac{3}{a})-(b-1+\frac{3}{b})=\frac{(a-b)(ab-3)}{ab}$，又 $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}<\frac{9}{4}<3$，因此 $a-1+\frac{3}{a}\leq b-1+\frac{3}{b}$，而 $1-a\leq 1-b$，因此由 *Chebyshev* 不等式可得

$$\sum_{cyc}\frac{1-a}{a-1+\frac{3}{a}}\leq\frac{1}{3}\sum_{cyc}(1-a)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}}\right)=0$$

綜上所述，命題成立，當且僅當 $a=b=c=1$ 時取得等號.

由上可見，切線法的難點在於找出切線方程和證明局部不等式 $f(x)\geq(\leq)px+q$，而代數解法難點則著重於式子的恆等變換和放縮。

六、總結

數形結合法是一種讓我們用幾何圖形來理解並解決一些抽象的數學問題的方法。數形結合的妙處在於，它可以把數學式子轉化為更直觀的幾何圖形，讓我們更容易發現其中

的規律和關係。數形結合能把問題轉化為一些基本的幾何關係,如兩點之間的距離或圓與切線的關係等等,讓我們更直觀地找出最值位置,而不需要用代數法進行繁瑣的恆等變換。數形結合在不等式變換中尤其有效,它可以讓我們發現一些意想不到的有趣解法和答案。本文只介紹了數形結合的幾種常見應用,更多的使用技巧有待讀者去探索和發現。

“過河”教學遐思

廣東省清遠市陽山縣黎埠中心小學

王玉芬

教學是教師的教和學生的學所組成的一種人類特有的人才培養活動。通過這種活動，教師有目的、有計劃、有組織地引導學生學習和掌握文化科學知識和技能，促進學生素質提高，使他們成爲社會所需要的人。這就需要老師上課前后要深耕教材，深入學生，深諳學情，教學知識深入淺出，教學反思深刻交流。

我們學校采用的是北師大版的教材，本學年受學校安排，任教小學三年級數學，上冊的教材第 8 頁中有一個主題單元，就是“過河”。

教材中,創設了“一條大船坐學生9人,每條小船比大船少坐學生3人。男生29人,女生25人”這樣的一個圖文情境,并設置了如下幾個分步小問:

1. 從圖中你知道了哪些數學信息?

2. 同學們都坐大船,需要幾條船?他們的討論過程你看懂了嗎?

3. 如果54人都坐小船,需要多少條船?你會做嗎?

從1.中,可以看到“我知道男生29人,女生25人。”深挖教材,其實還可以引導學生思考“男生比女生多幾人?女生比男生少幾人?男生還要再多幾人才會等于女生人數的2倍?女生還要再多幾人才會等于男生人數的2倍?”等等這樣的數量關系,以厘清男生與女生人數的差別。

同樣的,教材中提示了“我知道一條大船坐9名同學,一條小船能坐……”,順着這個方向,我們可以帶引學生尋找“一條小船能坐多少名同學?一條大船和一條小船能坐多少名同學?2條小船能坐多少名同學?多少條大船的裝載量等于幾多條小船的裝載量(比如是:2條大船的裝載量等于3條小船的裝載量,4條大船的裝載量等于6條小船的裝載量,等等。這里答案不唯一,從而引導學生不知不覺地走進開放題範疇,打開思路,開拓思維,打破常規思維的解題局限)?”等等這樣的船只裝載量的關系,讓學生深入淺出地理解大、小船只的裝載容量,以便于尋覓需要用到的大、小船只的數量。

在2.中,通過引入括號(　　),讓學生討論“29 + 25 ÷ 6”、“29 + 25 ÷ 9”、“29 ÷ 9 + 25”、“29 ÷ 6 + 25”、“29 ÷ 6 + 25 ÷ 6”、“29 ÷ 9 + 25 ÷ 9”、“(29 + 25) ÷ 6”、“(29 + 25) ÷ 9”各自表示的數量意義,找出相等的數量關系,感受即將要學習的除法結合律和除法分配律,知道小括號能改變運算順序,并適時把“它是荷蘭人吉拉特最先開始使用的”歷史典故告訴學生,以增加同學們對數學的學習興趣。并從中辨析正確與錯誤的想法,充分暴露錯誤的思維過程,從錯誤中走向正確,從錯誤中避免錯誤,從錯誤中結束錯誤。

對于3.的問題,“如果54人都坐小船,需要多少條船?”可以引導學生這樣發散思維:“如果54人都坐小船,需要多少條船?如果54人都坐大船,需要多少條船?如果女生25人都坐小船,男生29人都坐大船,需要多少條船?如果女生25人都坐大船,男生29人都坐小船,需要多少條船?如果每條大船必須要坐5名男生和4名女生,每條小船必須要坐3名男生和3名女生,需要多少條船?”這樣就培養到學生舉一反三、觸類旁通的發散思維能力和自主學習的主體主導學習習慣。

對于教材的配圖,不象是要過的“河”,更象是要游覽的“湖”,這一點,我覺得可以改善一下。另外,就是大、小船只的數量,可以設置一個範圍。不過,無論如何,起碼學校沒有選用“毒教材”,應該要爲領導決策者的英明和冷靜點贊。

數學來源于生活,提煉于生活,最終都會回歸于生活,服務于生活。對于創設的題目情境,我覺得還可以增加一個條件,讓情境更生活化。那就是過河的船只的收費問題(也可以說是購買船票的問題):怎樣搭配,才能使得花費的開支最少?

例如,每條小船收費15元,每條大船收費20元,怎樣搭配,才能使得花費的開支最少?

當全部 54 人都乘坐小船時,要花費 $54 \div 6 \times 15 = 135$ 元;而全部 54 人都乘坐大船時,要花費 $54 \div 9 \times 20 = 120$ 元。顯然,全部 54 人都乘坐大船時,花費的開支最少。

當大、小船只的數量,設置一個範圍后,解題的思路和答案又有所不同了。例如,大船只有 5 條,小船有 9 條,每條小船收費 15 元,每條大船收費 20 元,怎樣搭配,才能使得花費的開支最少? 對此,分析解答如下表:

情況類型	大船條數	小船條數	全部船只數	全部花費(元)
1	1	8	9	$1 \times 20 + 8 \times 15 = 140$
2	2	6	8	$2 \times 20 + 6 \times 15 = 130$
3	3	5	8	$3 \times 20 + 5 \times 15 = 135$
4	4	3	7	$4 \times 20 + 3 \times 15 = 125$
5	5	2	7	$5 \times 20 + 2 \times 15 = 130$

對照上表,可以帶引學生嘗試尋找一些結論,例如:

(1) 花費的開支最少的情況下,全部船只數也必然最小(剛剛好坐滿全部船只,每條船只不留空位);

(2) 全部船只數最大,花費的開支必然是最大的;

(3) 就本題目而言,要花費的開支最少,就要盡可能先坐滿大船(當然,如果把大、小船只的價格再作調整,那就另當別論了)。

去到這里,已經不知不覺地引導學生進入到了一個很重要的解題思想 —— 分類討論法,也潛移默化地培養到學生分類比較、尋求最優的學習意識了。

課后的作業,可以讓學生嘗試改變大、小船只的數量和單價,分組研習,討論商談,歸納結論,目的是鞏固發散思維、主導學習、分類討論、分類比較、尋求最優。當然也可以讓學生自行創設題目,并作解答,以檢驗學習成果。

教學,是爲了學而教? 還是爲了教而學? 一句老話“學生半桶水,老師一桶水”,甚至,“學生半碗水,老師一桶水”,既要透徹知識內涵,更要延伸內容銜接。負責任的老師,必然會在上課前后深耕教材,深入學生,深諳學情,教學知識深入淺出,教學反思深刻交流。

參考資料:

“過河”. 北師大版小學三年級數學上冊,第 8 頁.

淺談如何在幼兒園數學教育中培養幼兒的創新精神

廣東省清遠市陽山縣第一幼兒園

歐雪梅

摘要:幼兒期是創新能力培養的關鍵時期,而數學教育作為幼兒教育的重要組成部分,對於培養幼兒的創新精神具有重要意義。本文旨在探討如何在幼兒園數學教育中有效地培養幼兒的創新精神。通過提供充滿探索和實驗的環境、多樣化的學習體驗、鼓勵幼兒展示創新以及結合實際生活情境等策略,我們可以為幼兒創造一個有利於創新思維發展的學習環境。這些策略不僅有助於幼兒在數學學習中獲得樂趣和成就感,還能為他們未來的學習和生活奠定堅實的基礎。

關鍵字:幼兒園;數學教育;創新精神;環境營造;學習體驗

一、引言

隨著時代的發展,創新已成為社會進步的重要推動力。而幼兒期作為個體發展的起始階段,是培養創新能力的關鍵時期。數學教育作為幼兒教育的重要組成部分,不僅承載著傳授數學知識的任務,更肩負著培養幼兒創新精神的重任。然而,當前幼兒園數學教育仍存在一些問題,如教學內容單一,教學方法傳統等,這些問題限制了幼兒創新思維的發展。因此,如何在幼兒園數學教育中有效地培養幼兒的創新精神,成為當前幼兒教育領域亟待解決的問題。

二、提供充滿探索和實驗的環境

(一) 數學教師的角色轉變

在數學教育中培養幼兒的創新精神,首先需要數學教師實現角色的轉變。傳統上,數學教師往往扮演著知識傳授者的角色,注重向幼兒灌輸數學知識。然而,在創新教育的背景下,數學教師應轉變為幼兒學習的引導者和支持者。通過提出問題、激發好奇心和鼓勵

嘗試新方法,激發幼兒的創造力和創新思維。這意味著數學教師需要關注幼兒的學習需求,尊重他們的個體差異,鼓勵他們自主探索和實驗。同時,數學教師還需要具備創新意識和創新能力,能夠設計富有挑戰性的數學活動,激發幼兒的好奇心和求知欲。例如,在《區別高矮》這一教育活動中,我們可以引導幼兒通過觀察來發現周圍事物的高矮差異,進而激發幼兒運用自己已有的知識經驗,如對顏色、形狀、大小的識別和應用,讓他們學會舉一反三,自己獨立設計高矮標記,並運用自己設計的標記,以小組合作的方式進行高矮排序練習。在整個教育活動中,幼兒始終都是活動的主導者,教師用精心設計的一系列問題,耐心地引導孩子積極地探索和思考,充分地調動了幼兒學習的積極性。在整個活動過程中,幼兒的思維都顯得非常活躍,而且他們設計的高矮標記也十分有創意,甚至讓在場的教師都感到讚歎不已。

（二）營造自由的學習環境

為了培養幼兒的創新精神,幼兒園需要營造一個自由,寬鬆的學習環境。在這個環境中,幼兒可以自由地表達自己的想法和觀點,不受限制地嘗試和探索。具體來說,幼兒園可以設立數學探索區,提供豐富的數學材料和工具,如積木、拼圖、計數器等,供幼兒自主選擇和使用。此外,幼兒園還可以設置數學遊戲區,通過遊戲化的方式激發幼兒對數學的興趣和熱情。在這樣的環境中,幼兒可以充分發揮自己的想像力和創造力,自由地探索和發現數學的奧秘。

三、多樣化的學習體驗

（一）多樣化的遊戲激發興趣

遊戲是幼兒最喜歡的活動之一,也是培養他們創新精神的有效途徑。在數學教育中,數學知識可以通過生動有趣的故事和多樣化的遊戲形式進行呈現。讓幼兒在遊戲中學習和探索數學。例如,在《三隻小豬》的故事中,讓幼兒學習比較大小、認識圖形等數學知識;在《小紅帽》的故事中,讓幼兒學習數數、分類等數學知識。通過角色扮演遊戲,幼兒可以在情境中理解和應用數學知識,從而提高他們的學習興趣和積極性。我們也可以設計一些數學益智遊戲,如“數位接龍”“圖形拼圖” 等,讓幼兒在遊戲中鍛煉數學思維和解決問題的能力。同時,我們還可以利用數位化教育資源,如數學 *APP*、動畫視頻等,為幼兒提供更加生動、有趣的數學學習體驗。這些多樣化的遊戲和活動不僅能夠激發幼兒對數學的興趣和熱情,還能促進他們創新思維的發展。

（二）動手實踐和實際操作

動手實踐和實際操作是幼兒學習數學的重要方式。通過親自動手運算元學材料和工

具,幼兒可以更好地理解和掌握數學知識。例如,在教幼兒加減法時,我們可以使用實物或圖片進行演示和操作,讓幼兒通過觀察和操作來理解加減法的含義和運算方法。此外,我們還可以組織一些數學實踐活動,如“測量身高”“統計物品數量” 等,讓幼兒在實際操作中運用數學知識解決問題。這些動手實踐和實際操作的活動不僅能夠加深幼兒對數學知識的理解,還能培養他們的創新思維和實踐能力。

(三)培養良好的學習習慣

良好的學習習慣是幼兒創新精神發展的重要保障。在數學教育中,我們要注重培養幼兒的學習習慣,如認真聽講、積極思考、主動提問等。同時,我們還要鼓勵幼兒養成自主學習的習慣,讓他們能夠自覺地探索和發現數學知識。為了培養幼兒的良好學習習慣,我們可以制定一些具體的規則和要求,如規定每天的學習時間和任務量,鼓勵幼兒按時完成學習任務並主動反思和總結自己的學習成果。此外,我們還可以利用獎勵機制來激勵幼兒養成良好的學習習慣,如設立“學習之星”“紅花牆” 等,讓幼兒在獲得成就感的同時更加熱愛學習。

四、鼓勵幼兒展示創新

(一)提供一個支援性的平臺

為了鼓勵幼兒展示他們的創新成果,我們要為他們提供一個支持性的平臺。例如,我們可以在活動室設置數學展示區、數學壁報等,在這個平臺上,幼兒可以展示自己的數學作品、分享自己的學習經驗和心得,並與其他幼兒進行交流和互動。通過這樣的展示和交流,幼兒不僅能夠獲得他人的認可和讚賞,還能從他人的作品中汲取靈感和啟示,進一步激發自己的創新思維。

(二)正面激勵和回饋

正面激勵和回饋是鼓勵幼兒展示創新的重要手段。當幼兒在數學學習中取得進步或表現出創新思維時,我們要及時給予他們正面的激勵和回饋。這可以是口頭的表揚、小獎品的獎勵等。通過正面的激勵和回饋,幼兒能夠感受到自己的努力和成果得到了認可和重視,從而更加積極地投入到數學學習中去。同時,我們還需要關注幼兒的個體差異和需求,給予他們個性化的指導和幫助,讓他們在展示創新的過程中不斷取得新的進步和突破。

五、結合實際生活情境

(一)在生活中應用數學

數學是一門與生活密切相關的學科。在幼兒數學教育中,我們需要注重將數學知識與

實際生活情境相結合,讓幼兒在實際生活中運用數學知識解決問題。例如,在教幼兒認識時間的時候,我們可以結合幼兒的日常生活作息來教時鐘的讀法和時間的計算方法。在教幼兒認識貨幣時,我們可以結合購物場景來教貨幣的換算和使用方法。通過這樣的結合實際生活情境的教學方式,幼兒不僅能夠更好地理解數學知識的含義和應用場景,還能培養他們的創新思維和實踐能力。

(二)培養問題解決能力

問題解決能力是創新精神的重要組成部分。在數學教育中,我們需要注重培養幼兒的問題解決能力。例如,我們可以通過設計一些具有挑戰性的問題來激發幼兒的好奇心和求知欲,引導他們通過觀察、分析、推理等過程來解決問題。同時,我們還要鼓勵幼兒嘗試多種方法和途徑來解決問題,培養他們的創新思維和發散性思維。通過這樣的培養方式,幼兒不僅能夠提高解決問題的能力,還能在解決問題的過程中不斷鍛煉自己的創新思維和實踐能力。

六、結論

綜上所述,幼兒園數學教育是培養幼兒創新精神的重要途徑。通過提供充滿探索和實驗的環境、多樣化的學習體驗、鼓勵幼兒展示創新以及結合實際生活情境等策略,我們可以為幼兒創造一個有利於創新思維發展的學習環境。這些策略不僅有助於幼兒在數學學習中獲得樂趣和成就感,還能為他們未來的學習和生活奠定堅實的基礎。因此,我們需要重視幼兒園數學教育中的創新精神培養工作,不斷探索和實踐有效的教育方法和手段,為幼兒的全面發展貢獻自己的力量。

參考文獻:

[1]《幼兒園科學活動中如何培養幼兒創新和實踐能力》.《傳奇故事》(上旬版)2021 年第 009 期.

[2]《基於創新能力培養的幼兒園教學模式探索》.《愛情婚姻家庭:愛情故事》2021 年第 008 期.

[3]《淺談幼兒美術教育中培養幼兒的創新能力》.《散文選刊》(中旬刊)2021 年 002 期.

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A
電話:853-28965253,853-66878553 傳真:853-28788259
E-mail: macaumath@yahoo.com.hk , inwmacau@yahoo.com.hk
Website:http://www.mathsmo.com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日	在氹仔海島公證署辦理本會註冊手續。

2003 年

6 月 7 日	舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會。
12 月 13、14 日	舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課。
12 月	《澳門數學教育》創刊號出版。

2004 年

4 月 17 日	舉辦“DM_Lab 和動態數學教學”講座。
9 月 30 日	赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學。
10 月 9、10 日	舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課。

2005 年

3 月 24 -28 日	赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。
4 月 16 日	與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會。
11 月 26、27 日	舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課。
12 月 20-28 日	前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

2006 年

3 月 4 日	舉辦“因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會。

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課。

6 月 25－29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。

12 月 9－10 日　舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”。

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”。

7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學：一個國際視角”及“有效數學教學實務：美國的經驗”講座。

7 月 30 日至

8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。

9 月 1 日　舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座。

2008 年

11 月 1 日　舉辦“小學數學專家講座”。

11 月 22 日　舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議。

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽（ARML），榮獲國際組第一名。

8 月 15 日~20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中。

11 月 14 日　舉辦“數學教學的有效性與開放性” 研討大會及示範課。

12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學” 評比大會。
（慶祝祖國成立 60 週年，澳門回歸 10 週年，本會成立 5 週年活動）

2010 年

6 月　成立“澳門數學奧林匹克學會”，政府憲報刊登該會章程。

11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。

1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。

9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”。

2012 年

6 月 9 日　　　舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課。

8 月 1-6 日　　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。

11 月 3-4 日　　舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”。

11 月 3 日晚上　舉行慶祝本會成立十週年晚宴，十週年成果展。

2013 年

4 月 6 日　　　舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽。

4 月 14 日　　進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 16 日　　名譽會長陳明金先生宴請本會，表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。

5 月 11 日　　舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”。

6 月 1 日　　　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽。

5 月 31、6 月 1 日前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML)，澳門隊第二。

6 月 15-19 日　舉辦數學實驗——統計與概率工作坊。

7 月 10 日　　澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。

7 月 18 日　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 1-7 日　　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流。

11 月 16-17 日　與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會。

12 月 7-9 日　　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級証書培訓班」。

12 月　　　　《澳門數學教育》第十一期出版。

2014 年

1 月 11 日　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會。

4 月 3 日　　　拜訪澳門基金會。

4 月 13 日　　進行中學第二十五屆、小學第十二屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 15 日　　拜訪澳門教育暨青年局。

4 月 17 日至 21 日赴臺灣澎湖、高雄參訪活動。

4 月 26 日　　舉辦“史豐收速算法”介紹會。

5 月 30-31 日　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML)，澳門隊第二。

6 月 14 日　　舉行「領導數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動。

7 月 11 日　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班。

7 月 12 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級証書頒獎禮暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
8 月 10–16 日	派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團。
10 月 18 日	舉辦“熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課”。
11 月 22–23、29–30 日	舉辦“史豐收速算法”導師培訓班。
12 月 6 日、7 日	舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽（澳門賽區）。
12 月	《澳門數學教育》第十二期出版。

2015 年

1 月 16 日	拜訪澳門基金會。
1 月 31 日	舉行成立“史豐收速算法”培訓基地新聞發佈會。
4 月 12 日	進行中學第二十六屆、小學第十三屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。
4 月 19 日	拜訪澳門教育暨青年局。
5 月 10 日	汪會長參加上海“小學數學教師教育高級研修班”。
5 月 23 日	舉行「任勇的數學教學主張」講座。
5 月 28–31 日	前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 29–30 日	前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊重獲冠軍。
6 月 13 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月 3–7 日	澳門大學教育學院與本會合辦“數學整數教育”專題研討會。
6 月 6 日	邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。
6 月 27 日	往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。
7 月 11 日	與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。
8 月	《兩岸三地升大數學教程》出版。
8 月 8–12 日	澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。
8 月 15–20 日	赴陝西省進行學術交流。
10 月 17 日	舉辦“幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課”。
12 月 5 日、6 日	舉辦“第一屆小學新思維數學‘澳門杯’課堂教學大賽評比大會”。
12 月 7 日	獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。
12 月	《澳門數學教育》第十三期出版。

2016 年

1 月 17 日	舉辦“兒童資優培育” 介紹會。
3 月 5 日	舉辦“希望杯數學競賽試題分析”講座。
3 月 19 日	合辦 “中、小學數學實驗和智力發展”專題講座。
5 月 26–29 日	前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 3–4 日	前往美國參加第 41 屆美國高中數學競賽(ARML) ,澳門隊獲亞軍。
6 月 18 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
10 月 22 日	舉辦“雲南麗江市教育局講座暨中學示範課”。
11 月 19 日	舉辦“四川省成都市成華小學示範課”。
11 月 25–29 日	前往馬來西亞參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。
12 月 10–11 日	舉辦第二屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月	《澳門數學教育》第十四期出版。

2017 年

3 月 11 日	慶祝十五周年會慶暨春茗聚餐。
5 月 25–28 日	前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 2–3 日	前往美國參加第 42 屆美國高中數學競賽(ARML)。
6 月 17 日	希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
7 月 8–9 日	舉行首辦「首屆奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽賽(2017)」。
9 月 12 日	拜訪譚俊榮司長。
11 月 4 日	舉辦“海峽兩岸小學數學課堂教學交流展示”。
12 月 9 日、10 日	舉辦第三屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月	《澳門數學教育》第十五期出版。

2018 年

1 月 28 日	前往中山拜訪華星幼稚園。
4 月 28 日	舉辦「世界七大數學死題破解演講會」。
5 月 24–29 日	前往新加坡參加第 29 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 1–2 日	前往美國參加第 43 屆美國高中數學競賽(ARML)。
6 月 30 日–7 月 2 日	合辦 2018 三維杯環亞太國際數學邀請賽(香港舉行)。
7 月 7 日	希望杯、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

5 月 25-28 日	前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月	為香港名創教育(文達出版社)編輯的澳門基力數學探知 1A 和 1B 出版。
6 月 16-17 日	前往深圳出席 2018 全國史豐收數學速算法大獎賽。
10 月 13 日	舉辦「使用漫畫進行數學教學 — 來自新加坡的經驗」講座。
11 月 10 日	舉辦「世界數學難題一尺解第二次講座」。
11 月 23-27 日	前往馬來西亞力行華小學參加第 5 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 8-9 日	第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題,為協辦單位。
12 月 15 日、16 日	舉辦常港澳小學「新思維數學」課堂教學邀請賽。
12 月	《澳門數學教育》第十六期出版。

2019 年

6 月 1 日	前往新加坡參加第 30 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 30 日- 6 月 8 日	前往美國參加第 44 屆美國高中數學競賽(ARML)。
7 月 5-8 日	主辦 2019 金蓮花杯國際數學邀請賽。
7 月 7 日	舉行金蓮花杯國際數學邀請賽、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月	為香港名創教育(文達出版社)編輯的澳門基力數學探知 2A 和 2B 出版。
11 月 22-25 日	前往馬來西亞參加第 6 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 6-7 日	為第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題,本會為協辦單位。
11 月 30 日、 12 月 1 日	舉辦「慶回歸--海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月	《澳門數學教育》第十七期出版。

2020 年

	因疫情關係,使本會上半年活動都未能如期舉行。
10 月 17 日	舉辦「簡約教育的理論與實踐思考」講座。
11 月 28-29 日	舉辦「海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月	《澳門數學教育》第十八期出版。

2021 年

	因疫情關係,使本會活動都未能如期舉行。
3 月 4 日	於浸信中學舉辦「華數之星」選拔賽。
6 月	參加第四屆分角尺作圖國際決賽。
12 月	《澳門數學教育》第十九期出版。

2022 年

	因疫情關係,使本會活動都未能如期舉行。
2 月 20 日	舉行慶祝本會成立二十周年晚宴。
12 月	《澳門數學教育》第二十期出版。

2023 年

7 月 20 日	拜訪中聯辦。
12 月 10 日	由澳門數學奧林匹克學會主辦,本會協辦 2023“金蓮花”杯國際數學邀請賽(澳門區)決賽。
12 月 17 日	舉行“金蓮花”杯國際數學邀請賽(澳門區)決賽頒獎禮。
12 月 21-25 日	探索海上絲綢之路・閩南文化・參訪交流團,到訪廈門及泉州兩地。
12 月	《澳門數學教育》第二十一期出版。

2024 年

7 月 26-30 日	在中聯辦教青部和貴州省教育廳的支持下,澳門數學教師考察團訪問貴州,就“立足數學教育,培育科技人才”的主題,與貴陽市第三中學教師進行了深入交流。
10 月 26 日	在鏡平學校小學部禮堂舉辦「數學補習有用嗎?」講座。邀請北京師範大學基礎教育質量監測協同創新中心數學監測部主任王立東教授主講,約 200 名教師及家長參加。
12 月	《澳門數學教育》第二十二期出版。