第十八期 No.18
ISSN 1814-2176

Educação Matemática de Macau

澳門数学教育

——张奠宙 題

Mathematics Education in Macau

澳門數學教育研究學會出版
2020年12月
ISSN 1814-2176
9 771814 217007

海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽

（2020 年 11 月 28 日、29 日）

教育暨青年局鄭錫杰處長致辭

汪甄南會長致歡迎辭

汪會長向常州嘗試教育科學院院長
邱學華教授頒發紀念品

汪會長向上海建橋大學教務長
朱海麟教授頒發紀念品

汪會長向史豐收速算法推廣中心主任
史豐實教授頒發紀念品

汪會長向常州大學嘗試教育學院副院長
劉國特教授頒發紀念品

汪會長向北京首都師範大學方運加教授
頒發紀念品

邵敏老師講解教育出版社新思維數學教材
的特色

澳門數學教育（第十八期） 2020 年 12 月

目　　錄

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號:2877
地址:澳門南灣街 107 號
刊頭題詞:張奠宙教授
排版:廣源紙業文具行
印刷:新文寶印務有限公司
刊號:ISSN 1814－2176

四校聯考(2018 年) 數學正卷選擇題

深度剖析、多元解答

澳門聖若瑟教區中學第六校　鄧海棠

澳門大學、澳門理工學院、旅游學院及澳門科技大學四所高校在 2017 年聯合推行“澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)”,聯合組織中文、葡文、英文和數學四個科目的入學考試,四科以外其他科目的考試或面試,則由四校自行安排及公布. 四校將根據各自課程之入學標準錄取學生. 有關各校課程之入學要求,考生需查閱四校之招生章程. 由於聯考并非統一入學分發,考生仍可同時獲多間高校錄取而作出入學選擇.

澳門四校聯考入學考試(2018 年) 數學正卷的選擇題題目如下,下面將對其逐題進行深度剖析和多元解答.

第一部分 選擇題. 每題佔四分,共佔六十分.

1. 設 $X = \{6^n - 5n - 1 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ 和 $Y = \{25n - 25 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$,則

$A.\ X \subset Y$　　$B.\ Y \subset X$　　$C.\ X = Y$　　$D.\ X \cap Y = \emptyset$　　$E.$ 以上皆非

答案: A

剖析: 數學集合在數學上是一個基礎概念,在數學領域具有無可比擬的特殊重要性. 本題考查的是集合之間的關系:(眞) 包含(于),相等,交集. 集合之間的關系是掌握集合內容的一個基本要求. 子集的概念,并集、交集和補集,集合的運算都是在“澳門四高校聯合入學考試(2017) 數學科考試大綱” 第 1 點“基本概念” 所作的要求.

2016 年的第 3 道選擇題就考查了集合的韋恩圖表示. 2017 年的第 1 道選擇題就考查了集合的內容. 2019 年的第 1 道選擇題則考查了集合的描述法表示. 2020 年的第 1 道選擇題就考查了集合的并集與交集運算.

解法 1:賦值列表法

n	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$\cdots$
$6^n - 5n - 1$	0	25	200	1275	7750					$\cdots$
$25n - 25$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	$\cdots$

從上表中可以看到集合 X 中有的元素,在集合 Y 中都會有;但是在 Y 中有的部分元素,如 50,75,等等,都不會出現在 X 中,故而 X 是 Y 的眞子集,$X \subset Y$,選 A.

解法 2:排除选择法

$\because\ 0 \in (X \cap Y)$,可以排除 D 選項;

$\because\ 50 \notin X$ 且 $50 \in Y$,可以排除 B、C、E 選項;選 A.

2. 將 $2x^3 + x^2 - 29x + 40$ 除以 $2x - 5$,則餘數為

$A.\ -5$ $B.\ 5$ $C.\ -20$ $D.\ 20$ $E.\ 30$

答案: B

剖析:余式定理是在“澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱”第4點“多項式及有理分式”所作的要求,至於長除法及綜合除法,因式分解,因式定理也是有所要求的.因式定理普遍應用於找到一個多項式的因式或多項式方程的根這兩類問題,從定理的推論得到結果,這些問題基本上是等價的.

2016 年的第5 道選擇題就考查了多項式的余式定理. 2017 年的第7 道選擇題也考查了多項式的余式定理的內容. 2019 年第 3 道選擇題就考查了多項式的因式定理(整除).

解法 1:余式定理

設 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 29x + 40$,

$\because\ f(x)$ 除以 $2x - 5$ 即除以 $2\left(x - \frac{5}{2}\right)$,

$\therefore$ 所求餘數為 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 29 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 40 = 5$;選 B.

解法 2:長除法

用長除法得商為 $x^2 + 3x - 7$,余數為 5,選 B.

解法 3:綜合除法

用綜合除法也得商為 $x^2 + 3x - 7$,余數為 5,選 B.

3. 若方程 $3x^2 - 4x + k = 0$ 的兩根之差是 $\frac{5}{3}$,則 $k =$

$A.\ \frac{2}{3}$ $B.\ 3$ $C.\ -\frac{1}{6}$ $D.\ -\frac{3}{4}$ $E.$ 以上皆非

答案: D

剖析:這是在“澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱”第5點“二次方程及二次函數”所作的要求. 韋達定理不僅可以說明一元二次方程根與係數的關係,還可以推廣說明一元 n 次方程根與係數的關係. 而通過韋達定理的逆定理,可以利用兩數的和、積關係反過來構造一元二次方程.

2016 年的第 6 道選擇題就結合完全平方公式考查了一元二次方程的根與係數的關係

（韋達定理）. 2017 年的第 11 道選擇題也考查了一元二次方程的根與係數的關係（韋達定理）. 2019 年的第 12 道選擇題則考查了應用根與係數的關係（韋達定理）構造一元二次方程.

解法 1：由一元二次方程的求根公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

得 $x_1-x_2=\dfrac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}=\dfrac{\sqrt{16-12k}}{3}=\dfrac{5}{3}$, 得 $k=-\dfrac{3}{4}$, 選 D.

解法 2：由一元二次方程的根與係數的關係（韋達定理）,

得 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-4}{3}=\dfrac{4}{3}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{k}{3}$,

又 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2-4\cdot\dfrac{k}{3}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2$, 解得 $k=-\dfrac{3}{4}$, 選 D.

解法 3：由一元二次方程的根與係數的關係（韋達定理）,

得 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-4}{3}=\dfrac{4}{3}$, ①

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{k}{3}$, ②

又已知 $x_1-x_2=\dfrac{5}{3}$, ③

聯立 ①, ③ 解得 $x_1=\dfrac{9}{6}$, $x_2=-\dfrac{1}{6}$, 代入 ② 得 $k=-\dfrac{3}{4}$, 選 D.

4. $\dfrac{a^3b^{-2}c^2}{(2a^{-1}b^2c)^3}=$

$A.\ \dfrac{1}{8b^4c}$　　$B.\ \dfrac{a}{8b^4c}$　　$C.\ \dfrac{a^6}{8b^8c}$　　$D.\ \dfrac{a^4}{8b^4c}$　　$E.\ \dfrac{a^6b^3}{8c}$

答案：C

剖析：這是在"澳門四高校聯合入學考試（2017）數學科考試大綱"第 6 點"指數及根式"所作的"指數的簡化與運算"要求.

常用的指數冪運算法則有：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $a^m\div a^n=a^{m-n}$, $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$, $(ab)^n=a^nb^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, $a^0=1(a\neq0)$.

2017 年的第 6 道選擇題就考查了指數及根式的運算. 2019 年的第 4 道選擇題則結合平方差公式考查了指數及根式的運算. 2020 年的第 4 道選擇題則結合指數及根式的運算考查了無理數（分數指數冪）的大小比較.

解法 1：$\dfrac{a^3b^{-2}c^2}{(2a^{-1}b^2c)^3}=\dfrac{a^3b^{-2}c^2}{2^3a^{-3}b^6c^3}=\dfrac{1}{8}a^{3-(-3)}b^{-2-6}c^{2-3}=\dfrac{1}{8}a^6b^{-8}c^{-1}=\dfrac{a^6}{8b^8c}$, 選 C.

解法 2：$\dfrac{a^3b^{-2}c^2}{(2a^{-1}b^2c)^3}=\dfrac{a^3b^{-2}c^2}{2^3a^{-3}b^6c^3}=\dfrac{a^{3+3}c^2}{2^3b^{6+2}c^3}=\dfrac{a^6}{8b^8c}$, 選 C.

解法3:可以考慮對 a、b、c 取各不相同的數值進行賦值排除,不妨取 $a=2,b=3,c=4$,

則 $\dfrac{a^3b^{-2}c^2}{(2a^{-1}b^2c)^3}=\dfrac{2^6}{8\times3^8\times4}$,

而 A 中 $\dfrac{1}{8b^4c}=\dfrac{1}{8\times3^4\times4}=\dfrac{3^4}{8\times3^8\times4}\neq\dfrac{2^6}{8\times3^8\times4}$,

B 中 $\dfrac{a}{8b^4c}=\dfrac{2}{8\times3^4\times4}=\dfrac{2\times3^4}{8\times3^8\times4}\neq\dfrac{2^6}{8\times3^8\times4}$,

C 中 $\dfrac{a^6}{8b^8c}=\dfrac{2^6}{8\times3^8\times4}$,

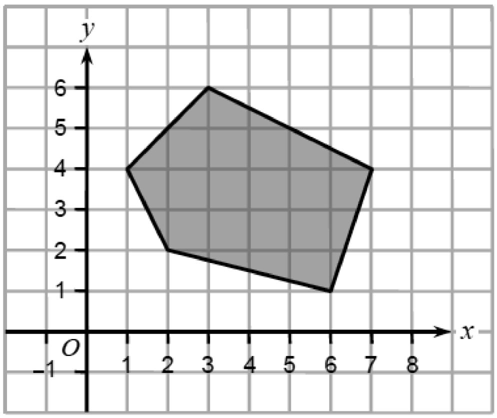
D 中 $\dfrac{a^4}{8b^4c}=\dfrac{2^4}{8\times3^4\times4}=\dfrac{2^4\times3^4}{8\times3^8\times4}\neq\dfrac{2^6}{8\times3^8\times4}$,

E 中 $\dfrac{a^6b^3}{8c}=\dfrac{2^6\times3^3}{8\times4}=\dfrac{2^6\times3^{11}}{8\times3^8\times4}\neq\dfrac{2^6}{8\times3^8\times4}$;

因為 A、B、D、E 都不合,故選 C.

注:一般而論,賦值排除法基本上都是必要非充分條件的運用,甚至有時會是非必要條件.

5. 若 (x,y) 為下圖中陰影區域(包括邊界)任何一點,則 $M=3x+2y-6$ 的最大值為



A. 4　　*B*. 14　　*C*. 23　　*D*. 32　　*E*. 以上皆非

答案: C

剖析:這是在"澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱"第 7 點"代數不等式"所作的在"線性規劃問題"的應用要求. 可以考慮用邊界點運算法去求 M 的最大最小值;也可以運用平移直線的線性規劃解法來處理這類問題.

2019 年的第 9 道選擇題再次考查了"代數不等式(組)"的"線性規劃問題",要求確定選項中的點是否位於給定的區域內(包括邊界).

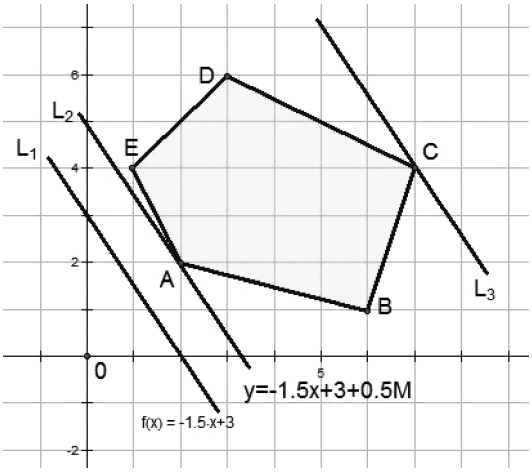
解法 1:邊界點運算法

把五個邊界點 $(1,4)$,$(2,2)$,$(6,1)$,$(7,4)$,$(3,6)$ 的坐標值分別代入 $M=3x+2y-6$ 中,得到五個 M 的邊界值分別為 5,4,14,23,15,當中最大的值為 23,選 C.

解法 2:平移直線的線性規劃法

把 $M = 3x + 2y - 6$ 變形為 $y = -1.5x + 3 + 0.5M$,

要求 M 的最大值,即是求直線 $y = -1.5x + 3 + 0.5M$ 在 y 軸上的截距的最大值,則要此直線與 y 軸相交於最高的點. 先作出直線 $L_1: y = -1.5x + 3$,再把它平移到與陰影區域(包括邊界)相交的位置,得直線 L_1 平移到 L_2 與陰影區域(包括邊界)相交於點 $A(2,2)$ 時,可得 M 的最小值 4,直線 L_1 平移到 L_3 與陰影區域(包括邊界)相交於點 $C(7,4)$ 時,可得 M 的最大值 23,如下圖所示. 選 C.



6. 若 $a,b > 1$,則 $log_a\left(\frac{a}{b}\right) + log_b\left(\frac{b}{a}\right)$ 最大值為

$A.\ -2$ $\quad B.\ 0$ $\quad C.\ 2$ $\quad D.\ 3$ $\quad E.\ 4$

答案: B

剖析:這是在"澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱"第 8 點"對數函數與指數函數"所作的在"對數的性質,換底公式"的應用要求,當中也涉及到均值不等式的應用. 常用的對數運算法則有:$log_a MN = log_a M + log_a N, log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N, log_a M^n = n log_a M, log_a \sqrt[n]{M} = log_a M^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} log_a M$;

對數恆等式有:$a^{log_a b} = b, log_a a^b = b, log_a a = 1, log_a 1 = 0$;

換底運算公式有:$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a} = \frac{lg\ b}{lg\ a} = \frac{ln\ b}{ln\ a}, log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} log_a b$.

解法 1: $log_a\left(\frac{a}{b}\right) + log_b\left(\frac{b}{a}\right) = log_a a - log_a b + log_b b - log_b a = 1 + 1 - (log_a b + log_b a)$

$= 2 - (log_a b + log_b a) \le 2 - 2\sqrt{log_a b \cdot log_b a}$ (**當** $a = b$ **時取** $=$) $= 2 - 2\sqrt{\frac{lgb}{lga} \cdot \frac{lga}{lgb}}$

$= 2 - 2 = 0$,**選** B.

解法 2: 本題也可以採用賦值法,結合放縮性質,對 a,b 取一些相對簡單的數字加以運算,不過當中需要對換底公式及其推廣式較為熟悉才能運用自如.

不妨取 $a=2,b=4$,

則 $log_a\left(\frac{a}{b}\right)+log_b\left(\frac{b}{a}\right)=log_2\left(\frac{2}{4}\right)+log_4\left(\frac{4}{2}\right)$

$=log_2\left(\frac{1}{2}\right)+log_4 2=log_2\left(\frac{1}{2}\right)+log_2\sqrt{2}=log_2\frac{\sqrt{2}}{2}\le log_2 1=0$(當 $a=b$ 時取 $=$).

選 B.

注:一般而論,賦值排除法基本上都是必要非充分條件的運用.

7. 若 $\frac{x}{y-x}=\frac{1+y}{y}$,則 $x=$

$A.\ y+y^2$ $\quad B.\ \frac{y+y^2}{1-2y}$ $\quad C.\ \frac{2y+1}{y+y^2}$ $\quad D.\ \frac{1-2y}{y+y^2}$ $\quad E.\ \frac{y+y^2}{1+2y}$

答案: E

剖析: 這是在“澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱”第4點“多項式及有理分式”的“(分式)多項式的運算”應用要求. 本題中,可視之為方程,解之可得.

2016 年的第 10 道選擇題就考查了(分式)多項式的化簡運算. 2020 年的第 3 道選擇題則考查了(整式)多項式的因式分解.

解法 1: 由原式得 $xy=y-x+y^2-xy$,

得 $2xy+x=y+y^2$,

得 $(2y+1)x=y+y^2$,

得 $x=\frac{y+y^2}{2y+1}$,選 E.

解法 2: 運用必要非充分條件的賦值排除法

不妨取 $y=1$,代入已知式,解得 $x=\frac{2}{3}$;

把 $y=1$ 分別代入 5 個選項:

$A.\ y+y^2=2$; $\quad B.\ \frac{y+y^2}{1-2y}=-2$; $\quad C.\ \frac{2y+1}{y+y^2}=\frac{3}{2}$;

$D.\ \frac{1-2y}{y+y^2}=-\frac{1}{2}$; $\quad E.\ \frac{y+y^2}{1+2y}=\frac{2}{3}$; $\quad$ 選項 E 符合,選 E.

注意,在運用賦值排除法時,如果選項中出現有相同的結果,則必須要再在出現相同結果的那些選項進行另外一個賦值再作排除,直到只有唯一的一個選項為止.

8. 考慮以下資料:14,5,7,7,8,8,9,10,11,m,n. 若以上資料的平均值及中位數均為 9,則下列何者正確?

Ⅰ. $m \geq 9$　　Ⅱ. $n \leq 11$　　Ⅲ. $m + n = 20$

A. 只有 Ⅰ 及 Ⅱ　　*B.* 只有 Ⅰ 及 Ⅲ　　*C.* 只有 Ⅱ 及 Ⅲ

D. Ⅰ,Ⅱ 及 Ⅲ　　*E.* 以上皆非

答案: *D*

剖析: 這是在"澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱"第16點"概率和統計"的"算術平均數,眾數及中位數"計算應用要求,考查的難度不大,只要能對中位數的求值正確運用則可. "統計"的考查相對較少,"概率"的考試題目卻是很多.

2016年解答題的第3道題、2017年解答題的第3道題、2019年解答題的第1道題、2020年解答題的第1道題都有考到"概率"問題.

解法1: 因為所給資料的11個數值里,中位數為9,則必有5個數值不大於9,而另外5個數值不小於9,把它們從小到大、自左而右作排序如下:

5,7,7,8,8,9,10,11,14,則 m 與 n 必定都大於或等於9.

得 $m \geq 9$, Ⅰ 正確.

又以上資料的平均值為9,

得 $14 + 5 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 10 + 11 + m + n = 9 \times 11$,

化簡得 $m + n = 20$,再結合 $m = 20 - n \geq 9$,得 $n \leq 11$. Ⅱ 及 Ⅲ 正確.

得 Ⅰ,Ⅱ 及 Ⅲ 都正確,選 *D*.

解法2: 由所給的11個數值的平均值為9,

得 $14 + 5 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 10 + 11 + m + n = 9 \times 11$,化簡得 $m + n = 20$. Ⅲ 正確.

又所給資料的11個數值里,中位數為9,則必有5個數值不大於9,

而另外5個數值不小於9,把它們從小到大、自左而右作排序如下:

5,7,7,8,8,9,10,11,14,

則 m 與 n 必定都大於或等於9. $m,n \geq 9$, Ⅰ 正確.

結合 $m + n = 20$,得 $m,n \leq 11$, Ⅱ 正確.

綜上得 Ⅰ,Ⅱ 及 Ⅲ 都正確,選 *D*.

9. 一組學生有12位女生和3位男生,從中隨機選出一名學生,其後再從餘下的學生中選出另一人. 則選出男女生各一人的概率為

A. $\frac{2}{15}$　　*B.* $\frac{5}{12}$　　*C.* $\frac{2}{35}$　　*D.* $\frac{6}{35}$　　*E.* $\frac{12}{35}$

答案: *E*

剖析: 這是對"澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱"第16點"概率和統計"的"隨機試驗,結果與事件;概率加法規則和乘法規則"的能力考察,當中結合了排列、組合的內容. 解題時要注意小心區分清楚是加法原理還是乘法原理,用組合數計算時不要計錯. "概率"的考試題多數出現在解答題目,這次出現在選擇題,就要引起注意了.

2016 年解答題的第 3 道題、2017 年解答題的第 3 道題、2019 年解答題的第 1 道題、2020 年解答題的第1道題都有考到"概率"問題. 而2016年選擇題的第11道題考到了排列問題, 2019 年選擇題的第 10 道題更是考到了排列、組合、加法原理和乘法原理的綜合混合應用問題,2020 年選擇題的第 8 道題也考到了數位的排列問題.

解法 1:由概率加法規則和乘法規則得 P("選出男女生各一人") $= \dfrac{12 \times 3 + 3 \times 12}{15 \times 14} = \dfrac{12}{35}$.

解法 2:用組合數公式得 P("選出男女生各一人") $= \dfrac{C_{12}^{1} \times C_{3}^{1}}{C_{15}^{2}} = \dfrac{12}{35}$.

10. 某一無窮等比級數之和為 3,其各項的平方數之和為 45,則此級數首項為

A. 1　　*B*. 3　　*C*. 5　　*D*. $-\dfrac{2}{3}$　　*E*. -6

答案: *C*

剖析: 這是對"澳門四高校聯合入學考試(2017) 數學科考試大綱" 第 11 點"數列" 的"等比數列無限項之和" 的考查. 解題過程中,要注意正確尋找首項和公比來求解.

2016 年選擇題的第 12 道題考到了求幾何數列的公比,2017 年選擇題的第 11 道題則結合一元二次方程考了等比數列、解答題的第 4 道題卻是考查求等差數列的通項公式以及前 n 項和,2019 年解答題的第4 道題則是考查求等比數列的通項公式以及前 n 項和,2020 年選擇題的第 13 道題是求等差數列的正項數、解答題的第 3 道題則是考查遞推數列的指定項和通項公式.

解:設此無窮等比級數為:$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots$,則有 $\dfrac{a_1}{1-q} = 3$.　①

又其各項的平方數之和為 45,則有$\dfrac{a_1^{\ 2}}{1-q^2} = 45$.　②

② ÷ ① 得 $\dfrac{a_1^{\ 2}}{1-q^2} \div \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{a_1^{\ 2}}{(1-q)(1+q)} \times \dfrac{(1-q)}{a_1} = \dfrac{a_1}{1+q} = 15$.　③

再聯立 $\dfrac{a_1}{1-q} = 3$　① 和 $\dfrac{a_1}{1+q} = 15$　③

解得 $a_1 = 5$,$q = -\dfrac{2}{3}$.

則此級數首項為 5,選 C.

11. 橢圓 $9x^2 + 25y^2 = 225$ 的右焦點為

A. $(-3,0)$　　*B*. $(3,0)$　　*C*. $(0, -4)$　　*D*. $(0,4)$　　*E*. $(4,0)$

答案: *E*

剖析:這是對"澳門四高校聯合入學考試(2017) 數學科考試大綱" 第 14 點"解析幾何"的"橢圓的定義和標準方程、圖形和性質" 的考查. 教學過程中要注意區分清楚焦點在 x 軸和 y 軸上的橢圓的焦點坐標、準線方程、頂點等等基本性質. 橢圓是解析幾何中圓錐曲線部

分的重要一環.

2017 年選擇題的第 14 道題考到了橢圓的焦點三角形的周長,2019 年選擇題的第 13 道題則考了焦點在 y 軸上的橢圓的參數取值範圍.

解:把橢圓 $9x^2+25y^2=225$ 的方程化為標準方程得 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

故而 $a^2=25, b^2=9$,得 $c^2=16, c=4$,右焦點為$(4,0)$,選 E.

12. 用 1 到 9 這九個數字,組成沒有重複數字的三位數,其中奇數的個數有

A. 504 *B*. 280 *C*. 224 *D*. 729 *E*. 720

答案: B

剖析:這是對“澳門四高校聯合入學考試(2017) 數學科考試大綱” 第 10 點“排列與組合” 的“基本概念” 的考查. 課堂教學時,要注意弄清是排列問題還是組合問題,是分類問題還是分步問題,以正確運用相關知識和公式求解.

2016 年選擇題的第 11 道題考到了排列問題,2019 年選擇題的第 10 道題更是考到了排列、組合、加法原理和乘法原理的綜合混合應用問題,2020 年選擇題的第 8 道題也考到了數位的排列問題.

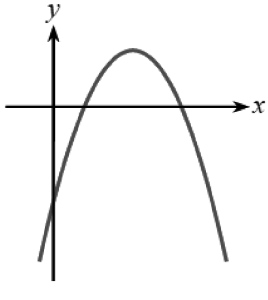
解法 1:在個位數中,奇數有 1,3,5,7,9 共 5 個,佔三位數全排列的九分之五,運用直接解法,得所求為:$9\times8\times7\times\frac{5}{9}=280$,選 B.

解法 2:在個位數中,偶數有 2,4,6,8 共 4 個,佔三位數全排列的九分之四,運用間接解法,得所求為::$9\times8\times7\times\left(1-\frac{4}{9}\right)=280$,選 B.

解法 3:運用特殊數位法,先排個位數,從 5 個奇數 1,3,5,7,9 中任選一個排在個位,有 5 種選擇方法,再在其餘的 8 個數中任選兩個作百位數和十位數兩個數位的全排列,有 8×7 種選擇方法,根據分步乘法原理,得所求為:$8\times7\times5=280$,選 B.

解法 4:運用逐個排位法,先排個位數,從 5 個奇數 1,3,5,7,9 中任選一個排在個位,有 5 種選擇方法,再在其餘的 8 個數中任選一個排在百位,有 8 種選擇方法,再在其餘的 7 個數中任選一個排在十位,有 7 種選擇方法,根據分步乘法原理,得所求為:$8\times7\times5=280$,選 B.

13. 函數 $y=a(x+b)^2+2$ 的圖形如下圖所示,其中 a 和 b 為常數. 下列何者正確?



$A.\ a > 0$ 及 $b > 0$　　$B.\ a > 0$ 及 $b < 0$　　$C.\ a < 0$ 及 $b > 0$

$D.\ a < 0$ 及 $b < 0$　　$E.$ 以上皆非

答案: D

剖析: 這是對"澳門四高校聯合入學考試(2017) 數學科考試大綱" 第15點"函數圖形"的"二次函數對稱、平移、伸展、收縮及反射等技巧的運用" 的考查. 當中,自然也包括了二次函數的頂點式、交點式、一般式的知識點的應用.

2019 年選擇題的第 14 道題就考到了拋物線頂點上下及左右的平移問題,2020 年選擇題的第 11 道題也考了求拋物線圖像上下及左右平移的解析式.

解: 由函數圖象開口向下,知 $a < 0$.

又函數對稱軸位於 y 軸右方,得對稱軸方程 $x = -b > 0$,故 $b < 0$.

比較結果得 D 為答案. 選 D.

14. 不等式 $|x - 2| < 2x$ 的解為

$A.\ x > \dfrac{2}{3}$　　$B.\ x < -2$ 或 $x > \dfrac{2}{3}$　　$C.\ -2 < x < \dfrac{2}{3}$

$D.\ 0 < x < \dfrac{2}{3}$　$E.\ x < -2$

答案: A

剖析: 這是對"澳門四高校聯合入學考試(2017) 數學科考試大綱" 第 7 點"代數不等式" 的"代數不等式和絕對不等式的運算及其解集;解一元一次或二元一次不等式組,包括用幾何方法求解;在線性規劃問題的應用" 的考查. 因而,本題也可以從代數方法和幾何方法乃至線性規劃的角度解決問題.

2016 年選擇題的第 8 道題考查了整式不等式的求解、解答題的第 4 題則考查了圖解二元一次不等式組,2017 年選擇題的第 2 道題考的是連續(遞進) 不等式,2019 年選擇題的第 9 道題考查了二元一次不等式組,2020 年選擇題的第 5 道題考查了求解絕對值不等式.

解法 1: 代數分類方法

① 當 $x > 2$ 時,原不等式等價於$(x - 2) < 2x$,解得 $x > -2$. 故 $x > 2$.

② 當 $x \leq 2$ 時,原不等式等價於 $-(x - 2) < 2x$,解得 $x > \dfrac{2}{3}$. 故 $\dfrac{2}{3} < x \leq 2$.

綜上所述,得所求解集為$\{x \mid x > 2\} \cup \left\{x \mid \dfrac{2}{3} < x \leq 2\right\} = \left\{x \mid x > \dfrac{2}{3}\right\}$,選 A.

解法 2: 賦值排除法.

對於 $E.\ x < -2$,取 $x = -3$,得 $|-3 - 2| = 5 < 2(-3) = -6$,$E$ 不成立!

對於 $D.\ 0 < x < \dfrac{2}{3}$,取 $x = \dfrac{1}{2}$,得 $\left|\dfrac{1}{2} - 2\right| = \dfrac{3}{2} < 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$,$D$ 不成立!

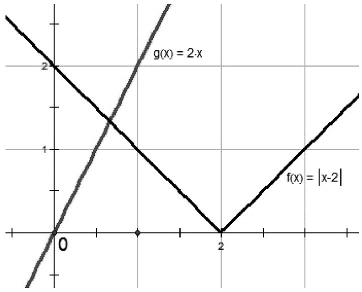
對於 $C.\ -2 < x < \dfrac{2}{3}$,取 $x = 0$,得 $|0 - 2| = 2 < 2 \times 0 = 0$,$C$ 不成立!

對於 $B.\ x < -2$ 或 $x > \frac{2}{3}$,由於包含了 $E.\ x < -2$ 的部分,E 不成立!故 B 也不成立!

從而選 A.

解法 3:幾何線性規劃法

在同一個平面直角坐標系內分別作出 $f(x) = |x-2|$ 和 $g(x) = 2x$ 的圖象如下. 兩個函數圖象的交點的橫坐標值為 $\frac{2}{3}$. 從圖中可見,$x < \frac{2}{3}$ 時,$|x-2| > 2x$;$x = \frac{2}{3}$ 時,$|x-2| = 2x$;$x > \frac{2}{3}$ 時,$|x-2| < 2x$. 從而選 A.

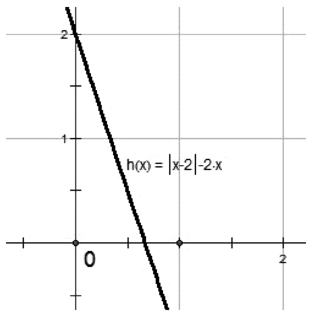


解法 4:函數作圖法

構造函數 $h(x) = |x-2| - 2x$,在平面直角坐標系內作出此函數圖象如下.

則原不等式等價於求 $h(x) < 0$ 的 x 的取值,

由圖象可知,$x > \frac{2}{3}$ 時,$h(x) < 0$ 即 $|x-2| < 2x$. 從而選 A.



15. 某個三角形的三邊之中點為 $A(3,4)$,$B(2,0)$ 和 $C(4,2)$. 下列哪一點是該三角形的一個頂點?

$A.\ (1,2)$ $B.\ (1,3)$ $C.\ (3,1)$ $D.\ (3,2)$ $E.\ (3.5,3)$

答案: A

剖析:這是對"澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱" 第 14 點"解析幾何"的"直角座標系:兩點的距離,線段的定比分點 —— 中點公式" 的考查. 可以用純代數求解方程組的方法,也可以數形結合法,還可以幾何求直線交點的方法來解決問題.

解法 1:代數方法 —— 求解方程組

設此三角形的三個頂點為 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

根據中點坐標公式得 $\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 3 \\ \dfrac{x_1 + x_3}{2} = 2 \\ \dfrac{x_2 + x_3}{2} = 4 \end{cases}$,即 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, & ① \\ x_1 + x_3 = 4, & ② \\ x_2 + x_3 = 8, & ③ \end{cases}$,

三式相加得 $2(x_1 + x_2 + x_3) = 18$ 從而 $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, ④

④ - ① 得 $x_3 = 3$;

④ - ② 得 $x_2 = 5$;

④ - ③ 得 $x_1 = 1$;

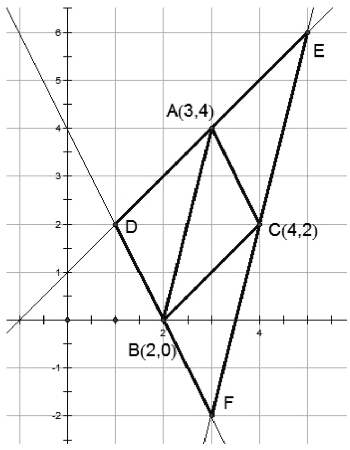
同理可得:$y_3 = -2, y_2 = 6, y_1 = 2$;

故此三角形的三個頂點為 $(1,2), (5,6), (3, -2)$.

比對選項得答案為 A.

解法 2:數形結合 —— 找直線交點

設點 $A(3,4), B(2,0), C(4,2)$ 分別為 $\triangle DEF$ 中 DE, DF, EF 的中點. 根據三角形中位線定理,過點 A 作 BC 的平行線 DE,與過點 B 的 AC 的平行線 DF 交於點 D;過點 A 作 BC 的平行線 DE,與過點 C 的 AB 的平行線 EF 交於點 E;過點 C 作 AB 的平行線 EF,與過點 B 的 AC 的平行線 DF 交於點 F;如圖所示,得 $\triangle DEF$ 三個頂點為 $D(1,2), E(5,6), F(3, -2)$. 比對選項得答案為 A.



解法 3:幾何方法 —— 求直線交點

設點 $A(3,4), B(2,0), C(4,2)$ 分別為 $\triangle DEF$ 中 DE, DF, EF 的中點.

根據三角形中位線性質,DE 必定在過點 $A(3,4)$ 且與 BC 平行的直線上,

由 $B(2,0), C(4,2)$,得 BC 的斜率 $k_{BC} = \dfrac{2-0}{4-2} = 1$,

根據點斜式直線方程得 DE 的方程為 $y-4=1\times(x-3)$，即 $x-y+1=0$.

同理，EF 必定在過點 $C(4,2)$ 且與 AB 平行的直線上，

由 $A(3,4)$，$B(2,0)$，得 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{0-4}{2-3}=4$，

根據點斜式直線方程得 EF 的方程為 $y-2=4\times(x-4)$，即 $4x-y-14=0$.

同理，DF 必定在過點 $B(2,0)$ 且與 AC 平行的直線上，

由 $A(3,4)$，$C(4,2)$，得 AC 的斜率 $k_{AC}=\dfrac{2-4}{4-3}=-2$，

根據點斜式直線方程得 DF 的方程為 $y-0=-2\times(x-2)$，即 $2x+y-4=0$.

聯立 $l_{DE}:x-y+1=0$ 及 $l_{EF}:4x-y-14=0$ 得他們的交點 E 的坐標為 $(5,6)$.

聯立 $l_{DE}:x-y+1=0$ 及 $l_{DF}:2x+y-4=0$ 得他們的交點 D 的坐標為 $(1,2)$.

聯立 $l_{DF}:2x+y-4=0$ 及 $l_{EF}:4x-y-14=0$ 得他們的交點 F 的坐標為 $(3,-2)$.

綜上，得 $\triangle DEF$ 三個頂點為 $D(1,2)$，$E(5,6)$，$F(3,-2)$. 比對選項得答案為 A.

"四校聯考" 並非唯一的錄取方式. 各高校在錄取過程中除了審視考生的考試成績外，亦會因應各高校自身特色和所報讀課程的要求，加入其他考慮因素以作綜合考量學生的"四校聯考" 成績，與中學畢業無關，不影響學生參加"四校聯考" 高校以外本地其他高校的入學考試，也不影響學生到外地升學.

參考資料：

[1] *https://www.gaes.gov.mo/admission/unification*
澳門高等教育輔助辦公室"四校聯考" 專頁.

[2]《澳門教育》2019 年第 2 期(總第 260 期)，
四校聯考(2017 年) 數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上)，鄧海棠.

[3]《澳門教育》2019 年第 3 期(總第 261 期)，
四校聯考(2017 年) 數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下)，鄧海棠.

[4]《澳門教育》2019 年第 4 期(總第 262 期)，
四校聯考(2019 年) 數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上)，鄧海棠.

[5]《澳門教育》2020 年第 1 期(總第 263 期)，
四校聯考(2019 年) 數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下)，鄧海棠.

[6]《澳門數學教育》2019 年第 17 期，
四校聯考(2016 年) 數學模擬卷選擇題深度剖析、多元解答，鄧海棠.

喜歡數學，熱心教育，善於傳承，勇於創新

——《汪甄南與澳門數學教育》讀後感

澳門數學教育研究學會副會長　鄭志民

讀了汪先生自傳式的教育專著《汪甄南與澳門數學教育》，感觸良多，浮想聯翩. 汪先生出生于祖國的大城市上海，成長於上海，受教育於上海，也服務於上海的數學教育，貢獻良多。

汪先生移居澳門，歷盡新移民的艱辛，他咬緊牙關，和新移民共渡時艱。從基層做起，轉了一圈，又回到老本行 —— 從事教育事業，再當數學教師。

在澳門，汪先生從事數學教育，從大學到中學，又從小學到幼稚教育，誇度之大堪稱澳門第一人！他還編寫小學數學指導書 ——《小學數學基礎理論》，在嘉諾撒聖心女子中學（中文部）任教時，編寫了校本教科書 ——《新編立體幾何》。汪先生還組建了“澳門數學教育研究學會”，展開了澳門數學教育研究的各項工作。

汪先生貫徹“一國兩制”思想，努力把祖國先進的數學教育經驗，教育專家先進的教育理念引進澳門，提高澳門數學教育水準，功不可沒！

《澳門數學教育》創刊於 2003 年 12 月，為澳門廣大教育工作者提供了教育和教學交流，探索和研討的平臺。“今有梧桐樹，引來金鳳凰”。《澳門數學教育》是澳門數學教育界的“梧桐樹”，招來了祖國大陸，港澳臺和國外的許多“金鳳凰”。他們系列教育理論和教改成果的發表，為推動和提升澳門的數學教育素質和水準作出了巨大貢獻。

汪先生為幫助學校輔導學生升大，應對高考，組織編寫了《兩岸三地十年高考數學試題詳解》上冊和下冊，他自任主編，該書的出版，給升大的學生和學校提供了極大的幫助，該書在澳門暢銷多年，深受廣大教師和學生的歡迎。為了幫助小學生從擺脫學習數學枯燥無味轉而喜歡數學，組織編寫《數學漫遊》一書，共 12 冊，該書大受學生和家長的歡迎。

為了使小朋友擺脫學習數學的傳統思維，汪先生還組織編寫了《澳門小學新思維數學》教科書，在澳門有培正中學小學部等近半數學校都在使用，深受歡迎。汪先生任會長的“數學教育研究學會”為推動各校提高數學水準，啟動和組織參與各類數學說競賽活動，如：“校際數學比賽”，“匯業杯常識問答比賽”，“中小學奧林匹克數學比賽”，“全國希望杯數學比賽”，“馬來西亞 *MIMO* 國際數學邀請賽”，“新加坡國際奧數邀請賽”，“香港環亞太國際數學邀請賽”，“美國 *ARML* 高中數學邀請賽”，“澳門金蓮花杯國際數學邀請

賽”，一系列的數學賽事，對提高學生數學素養，毋用置疑，有著極其重要的作用。

應該特別指出的是，“美國 *ARML* 高中數學邀請賽”，我們在教青局和基金會的大力贊助下，澳門隊連續十年參加國際組賽事，共獲得三次冠軍和七次亞軍，特區政府兩次頒發“功績獎狀”，使澳門隊全體學生和培訓老師受到極大鼓舞。

為了提升澳門數學奧林匹克教練員的專業水準，他還特別邀請上海華東師範大學數學專家劉鴻坤和熊斌教授來澳門，開班培訓中小學數學奧林匹克教練員。為了提高澳門數學教育水準，汪先生雖年事已高，但他不怕辛勞，走南闖北，不遺餘力，精神可嘉，令人肅然起敬！

《澳門數學教育研究學會》已走過十七個春秋，汪會長主持會務重視發揮老一輩教師豐富的寶貴經驗和傳承作用，也重視發揮中青年教師的中堅力量，重視老、中、青精神團結，共同奮進，因此《澳門數學教研究學會》會務蒸蒸日上，令人刮目相看，受到社會的一致讚揚。

汪會長“愛祖國，愛澳門，喜歡數學，熱心教育，善於傳承，勇於創新”的不朽精神，將永載澳門數學教育的光輝史冊！

如何培養學生學習數學的興趣

廣東省江門市新會區會城紅衛小學　林穎葵

瑞士教育家皮亞傑認為:兒童是具有主動性的人,所教的東西要能引起兒童的興趣,符合他們的要求,才能有效地促進他們的發展。興趣是最好的老師,是獲取知識的最大幫手。學生對數學是否有興趣直接影響到學生數學學習的效果,有了興趣,學生才能樂意走進課堂,去品味學數學的情趣;有了興趣,才能使學生學得輕鬆愉快,他們才會有展示自我能力的欲望;使學生從而愛數學,學好數學;所以培養學生學習數學的興趣尤為重要。

在低年級數學教學中,我體會到:低年級兒童好玩、好動、天真活潑,"遊戲式教學" 是他們喜聞樂見的形式。此外,有趣的數學情景、教師生動形象的語言、教材中擬人化的動物插圖、競賽性的練習等,也能很好的激發他們的興趣。因此,在教學時,根據低年級學生的這一特點,我採取了各種教學手段和方法,來激發學生的求知欲,培養學生學習數學的興趣。以下是我在教學中的一些心得體會:

一、愛動真心,以情激發學生的學習興趣

從培養師生間的感情入手,創設和諧融洽的學習氛圍。在數學教學中,我體會到:教師只有以全身心的愛對待學生,學生才會喜歡老師,才會以十足的幹勁來學習所教的功課,因此動眞心,是激發學生學習興趣的前提,教師對學生的愛,是學生對學習數學知識產生興趣的基礎。

二、使用兒童化的語言來激發學生的學習興趣

數學的教學內容比較抽象、枯燥、無味,它不象語文,沒有形象生動的語言及生動的故事情節,不容易引起學生對數學的學習興趣。對一個低年級的學生,特別是一年級的學生來說,對數學產生濃厚的興趣的動力來源往往是教師本身。語言幽默,內容吸引人,是非常關鍵的。我在教授"10 以內的減法" 時,運用了一個完整的童話故事,將內容穿插於其中,甚至提問時也以"小動物遇到了難題,誰來幫助他?" 這樣的方法來引導學生學習,一節課下來,每個學生聽的津津有味,接受的也很快,注意力達到了 40 分鐘,注意人群也達到了 100%。通過這樣的教學,賦予數學內容以一定的感情色彩,將數學的知識滲透到童話的故事中去,

從而激發了學生對數學的學習興趣。由此可見,一堂課能否吸引人,能否使學生對數學產生興趣,關鍵在於老師的授課方式,語言方式是否貼近低年級學生的年齡特點。

三、利用直觀教具、操作學具激發學生的學習興趣

皮亞傑強調兒童數學要擺弄具體物體,認為兒童動手做並在動中理解比用語言更重要。數學的本質在於抽象,抽象在過程中佔有十分重要的位置,但是離開具體的感知,特別是對兒童來說,進行數學的抽象幾乎是不可能的,因此從感知到抽象概括是數學教學過程中學生理解知識和認識構建的重要手段。一年級的學生抽象思維能力較差,可是他們好動、好奇心強,對新奇動人的事物比較敏感。在教學過程中,我採用直觀教具、讓學生操作學具來激發學生的學習興趣。如:我在教學生"認識鐘錶" 這課時,我提前佈置學生回去自己做一個鐘面,在做的過程中他發現鐘面上有12 個數字,有兩根針,這時他肯定想知道這些有什麼作用呢?有的學生當時就向家長討教,或在第二天上課時指出來。這就為第二天的課做好了鋪墊。這時學生帶著疑問而這些是他們急於知道的,那麼在上課的時候學生的興趣會被積極調動起來,而解決這些問題的興趣就更濃了。又如:我在教"正方體和長方體的認識"時,先讓學生找到生活中的具體實物,然後讓學生來觀察,觸摸、討論、交流,得出了長方體的"長"、"寬"、"高" 的概念。讓學生觀察、測量、分析對比後得出結論,這樣不僅加深了學生對抽象概念的理解和掌握,而且增強了學生探求知識的興趣。在教學中,將抽象的學習知識,寓於學生的樂趣之中,寓於學生親自動手操作之中,這樣使學生對所學知識深信不疑、記憶深刻,發展了學生的智力,培養了學生的思維能力。

四、用數學遊戲來激發學生的學習興趣

遊戲是小學生最喜愛的活動,把遊戲帶入課堂,使數學教學同遊戲有機結合起來,使學生在想、做、玩,練中理解數學知識,擴展思維保持興趣。使學生在學數學中,愉快、輕鬆地學。我在教學時,常常會選擇一些符合教學內容的遊戲來激發學生的學習興趣,使學生能在輕鬆、愉快的氣氛中鞏固學到的數學知識。如:在複習"20 以內的加減法" 時,我讓學生做"爭當模範營業員" 的遊戲,教師一手拿著"人民幣",一手舉著所購買的物品的價格卡,讓學生算出要找回的錢,並寫在練習本上,經過幾次後評出模範營業員,這樣促使學生進一步鞏固所學到的知識。課堂教學設計遊戲要因勢利導,能儘量發揮學生好動好玩的特點。在數學教學中適時、適度、適當地組織一些競賽性的小遊戲,有利於激發學生興趣,增加教學效果。又如:在教學"元、角、分" 的練習中,我設計了"小熊賣文具" 的遊戲。請一個小朋友戴上頭飾做小熊,大家當顧客,到文具店買東西。這一場景,真實地再現了孩子們的生活,頓時喜形於色,迫不及待地加入遊戲行列,望著商店裡想買的東西,快樂之情溢於言表。此時此刻,教師及時把商店裡要買的東西變成簡單的元、角、分換算,看著價格單上的價錢就能

買到你想買的東西。在遊戲中學習,學生學而不厭,得到了事半功倍的效果。

五、採用自編口訣激發學生的學習興趣

小學生對順口溜學得快,記得牢。在教學中,我根據教學內容的特點自編口訣,讓學生輕鬆愉快地學習掌握數學知識。在講被減數中間、末尾有零的退位減法時,我在學生學完新課的基礎上,引導學生找規律,總結出:被減數中間、末尾有零的退位減,“零頭有點就是九,零頭無點就是十”。使學生對數學知識能夠牢固準確地記憶,有利於學生克服學習中的困難,培養其學習興趣,使“苦學” 變“樂學”。這樣使學生積極性調動起來,由抽象變為形象,化難為易,從而激發學生的興趣。

六、採用多媒體等電教手段激發學生的學習興趣

在現代社會中,資訊的表現形式多種多樣。隨著媒體技術,特別是電腦技術的發展,出現了以電腦為核心的能夠在一種媒體上表示、傳遞和處理多維化資訊的多媒體系統,它能夠同時獲取、處理、編輯、存儲和展示包括文字、圖形、聲音、靜態或動態圖像、動畫等不同形狀的資訊在電腦上把圖、文、聲集成在一起使得各種媒體互補,傳遞資訊具有很強的眞實感和表現力。多媒體教學為小學生勾畫出一個多姿多彩的視聽學習環境,是實現學生獲取知識資訊最優化的通道。利用多媒體課件進行課堂教學,不但信息量大,而且圖、文、聲並茂,非常符合低年級學生的心理特點。不但能強化學生的記憶,而且還給學生展現出無限的知識空間,激發學生獲取資訊和新知識的的情感需求。例如,在學習“10 的認識” 的課堂上,教師簡單地操作鍵盤,螢幕上出現了數位娃娃“0”,接著跳出“1”、“2”、“3”、“4”、“5”、“6”、“7”、“8”、“9”,同時出現畫外音:“9” 說自己最大,看不起“0”,“1” 出來打抱不平,說:“如果我與 0 站在一起,就比你大。” 教師問:“小朋友,你們相信嗎?” 螢幕一閃,1 和 0 站在一起,把孩子們緊緊吸引住了。教師自然地把學生引入新課:“10 的認識。”

七、巧設練習,激發學生的學習興趣

重複單調的練習,學生會產生厭煩情緒,注意力不集中,有時白白浪費時間,所以練習設計要力爭新穎創新。就其教具來說,我認為習題可用兒童所喜歡的小熊貓、小白兔、小貓等動物的眼睛出示數字,在動物的鼻子出示運算子號,也可以把數位卡片或題卡戴在小動物的頭上或掛在其脖子上,同時習題也可以製作一些色彩鮮豔,帶點魔術性和童話色彩的圖片。我們也可以把本來靜的,不會動不會說話的習題“喬裝打扮”,予以擬人化,變成會說話的事物。如在“比較數的大小” 時,我用語言創設情景:61,62 兩個數字小朋友在爭吵,他們都認為自己是老大,怎麼辦呢?這樣極富美感,為學生在想像中滲透一種內在的欣喜和滿

足。在練習的設計上,我們要講究形式多樣,可以進行聽音,對口令,看誰爬得高,開火車等生動活潑的練習。如教數的組成時,可以讓學生邊打手勢邊對口令,再穿插接力賽,小貓湊數等有趣的練習,使學生的思想處於積極的興奮狀態。

總之,學生是學習的主體,不是知識的容器。教師傳授知識、技能只有充分發揮學生積極性,引導學生自己動腦、動口、動手,才能變成學生自己的財富。教師要把學習的主動權交給學生,要善於激發和調動學生的學習積極性。要讓學生有自主學習的時間和空間,要讓學生有進行深入細緻思考的機會、自我體驗的機會。教學中要盡最大的努力,最充分地調動學生積極主動學習,由“要我學” 轉化為“我要學”、“我愛學” 的學習興趣。教學實踐表明,學生的學習興趣是一種非常活躍的心理意向活動。興趣一旦激發起來,學生就會感動學習的樂趣,就會感動學習是一種需要、一種快樂,而不是負擔,從而去努力刻苦學習。因此,我們在數學教學中要千方百計調動學生的積極性,激發學生學習的興趣。

讓學生在嘗試中成長

——《倍數與因數》教學設計

葉建雲

課前思考

《倍數與因數》是北師大版小學數學五年級上冊第三單元《倍數與因數》的第一課時。認識倍數和因數是進一步學習求最大公因數和最小公倍數的基礎。本課內容的學習,起著承上啟下的作用。

結合教材特點和學生實際情況,確定本課教學目標如下:

1、創設情境,引導學生聯繫乘法認識倍數與因數。

2、聯繫實際,引導學生理解和掌握求一個數的倍數的方法。

3、結合活動,引導學生感受數學學習的樂趣,感悟數學文化的魅力。

本節課的教學重點是:聯繫乘法認識倍數與因數;教學難點是學會用倍數和因數的知識解決生活中的相關問題。

教法、學法預設

美國著名教育家杜威認為:"你可以將一匹馬牽到河邊,但你決不可能按著馬頭讓它飲水。" 這句話道出了數學教學的靈魂在於要引導學生積極、主動地參與學習探索過程。根據教材內容和編排特點,結合學情,在教學中,我準備採用以下三種教學方法:

1、情境體驗。新課程標準提出,學生的數學學習內容應當是現實的、有意義的、富有挑戰性的。這就要求我們要為學生創設真實的、合理的學習情境,並誘導學生從中獲得體驗。

2、嘗試探究。由邱學華先生宣導的嘗試教學法,已在全國範圍內開展了四十年的探索與實踐。嘗試教學法的核心理念,可以用一句話來概括,那就是:"請你不要告訴我,讓我試一試"。本課中,將在課中多次引導學生嘗試,讓學生在嘗試中學習,在嘗試中發展,在嘗試中成功!

3、直觀展示。俗話說:我聽到了,我就忘記了;我看到了,我就記住了。本節課注重對學習內容的多方面的直觀展示,數形結合,促進學生思維的發展。

學習是一個全方位、立體型的建構過程。本節課通過猜一猜、試一試、比一比、動一動等多種學習方法相結合，能讓學生積極、主動、生動、活潑地參與學習全過程。

教學過程預設

為實現本課教學目標，本課教學過程擬分成以下四部分：

（一）眼力比拼，引入新課

課伊始，我讓學生進行嘗試進行眼力大比拼，在趣味中引入新課。

設計意圖：良好的開始是成功的一半。這樣的新課引入簡單、快速、快樂，一下子調動學生學習的積極性。

（二）嘗試探究，學習新課

1、你從一個乘法算式裡發現什麼？

2、嘗試判斷

嘗試判斷，並說說自己的想法。

3、嘗試比一比

請同學們找找 8 的倍數，看誰找得多？

4、嘗試寫出 40 以內 9 的倍數

5、嘗試應用

每朵花 6 元，小明有 20 元錢，他給媽媽買花，可能會用多少錢？

6、請你猜猜葉老師幾歲？

設計意圖：讓學生在嘗試中學習，在嘗試中發展，在嘗試中成功，在嘗試中感悟學習的快樂！

（三）適度拓展，感悟文化

擬從以下兩個方面對學習內容進行適當的拓展：

1、神奇的完美數。

2、奇妙的相親數。

設計意圖：文化，源遠流長。數學發展的歷史，同時也是一部洋洋灑灑的文化史。文化可以讓課堂厚重起來！讓我們共同努力！

附：葉建雲，中學高級教師，常州大學嘗試教育科學研究院兼職研究員，嶺南師範學院廣東省中小學教師發展中心客座教授，深圳城市學院教師繼續教育授課專家，江西省國培計畫指導專家，深圳市寶安區高層次教育類人才、寶安區葉建雲名教師工作室主持人，廣東省首屆骨幹教師培養人選，廣東省深圳市寶安區官田學校小學數學教師。在《人民教育》、《小學數學教師》、《中國教育報》等四十多家教育刊報上發表文章一百多篇，出版教育專著《追尋幸福的教育》、《課堂解碼 —— 小學數學精品課評析》、《小學數學有效評課的理論與

實踐》等三本，合著、主編教育著作十一本，先後參與、主持過近十個市級、省級和國家級課題，四次獲新世紀版小學數學錄影課、課例資源和現場辯課一等獎。《小學教學（數學版）》2012 年第 12 期和《教師》2017 年第 12 期封面人物。

數學探究之《一道立方根問題的推廣》

澳門勞工子弟學校　初二級學生　鍾錫豪
（指導老師 魏均僑）

在數學探究中,往往可以從一道題目推廣出更一般性的結論. 下面是2016年全澳校際數學比賽的一道與立方根有關的問題,我們將對它進行探究.

化簡:$\sqrt[3]{3+2\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{\frac{7}{3}}}$.(2016年全澳校際數學比賽第15題)

解:設 $\sqrt[3]{3+2\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$,又設$\sqrt[3]{3+2\sqrt{\frac{7}{3}}}=a$,$\sqrt[3]{3-2\sqrt{\frac{7}{3}}}=b$, 則 $a+b=x$ 和 $a^3+b^3=6$. 於是

$$ab=\sqrt[3]{3+2\sqrt{\frac{7}{3}}}\cdot\sqrt[3]{3-2\sqrt{\frac{7}{3}}}=\sqrt[3]{9-\frac{28}{3}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=-\frac{9^{\frac{1}{3}}}{3}$$

由 $a^3+b^3=6$,可得

$$6=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab].$$

把 $a+b=x$ 和 $ab=-\frac{9^{\frac{1}{3}}}{3}$ 代入上式,得

$$6=x(x^2+9^{\frac{1}{3}}),$$

$$x^3+9^{\frac{1}{3}}x-6=0.$$

設 $3^{\frac{1}{3}}=y$,則 $3=y^3$ 以及 $9^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}=y^2$,代入上式,得

$$x^3+xy^2-2y^3=0$$

$$(x^3+x^2y+2xy^2)-(x^2y+xy^2+2y^3)=0$$

$$x(x^2+xy+2y^2)-y(x^2+xy+2y^2)=0$$

$$(x-y)(x^2+xy+2y^2)=0.$$

從而 $x-y=0$ 或 $x^2+xy+2y^2=0$,注意到 $x^2+xy+2y^2$ 恆大於0,因此必有 $x-y=0$,從而 $x=y=3^{\frac{1}{3}}$,所以

以上是完整的解答. 仔細觀察以上等式,等式左邊的兩項都有常數3,而右邊也有常數3. 若將常數3改為4,則 $2\sqrt{\frac{7}{3}}$ 會改變為何數?

不妨設這個數為 x,則有

$$\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{4-x}=\sqrt[3]{4}.$$

那麼 x 的值將會是什麼呢?

首先,設 $\sqrt[3]{4+x}=a$, $\sqrt[3]{4-x}=b$,則 $a+b=\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}\cdots\cdots①$,且

$$\begin{cases}a^3=4+x\cdots\cdots②\\ b^3=4-x\cdots\cdots③\end{cases}$$

② + ③,得

$$a^3+b^3=8.$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=8$$

把 ① 代入上式,得

$$2^{\frac{2}{3}}(a^2-ab+b^2)=8$$

$$a^2-ab+b^2=4\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots④$$

由 ①,得

$$(a+b)^2=(2^{\frac{2}{3}})^2$$

$$a^2+2ab+b^2=2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots⑤$$

⑤ - ④,得

$$3ab=-2\cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$ab=-\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots⑥$$

我們有$\begin{cases}a+b=2^{\frac{2}{3}}\cdots\cdots①\\ ab=-\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots⑥\end{cases}$,構造實根為和的關於 t 的二次方程為

$$t^2-2^{\frac{2}{3}}t-\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=0.$$

根據求根公式可知

$$t=\frac{-(-2^{\frac{2}{3}})\pm\sqrt{(-2^{\frac{2}{3}})^2-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)}}{2}$$

$$t=\frac{2^{\frac{2}{3}}\pm\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}+\frac{8}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}}{2}$$

$$t=\frac{2^{\frac{2}{3}}\pm\sqrt{\frac{14}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}}{2}$$

$$t=\left(2^{\frac{2}{3}}\pm\frac{42^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2}\pm\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 21^{\frac{1}{2}}}{6}.$$

由 a 和 b 的對稱性,不妨設 $a>b$,則

$$\begin{cases} a=\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{2}+\dfrac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 21^{\frac{1}{2}}}{6}\cdots\cdots ⑦ \\ b=\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{2}-\dfrac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 21^{\frac{1}{2}}}{6} \end{cases}$$

② - ③,得

$$a^3-b^3=2x$$

$$2x=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\therefore x=\frac{(a-b)[(a-b)^2+3ab]}{2}.$$

把 ⑥、⑦ 和 ⑧ 代入上式,可得

$$x=\frac{\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 21^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}\right)\left[\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 21^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right]}{2}$$

$$x=\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 21^{\frac{1}{2}}}{3}\cdot\left(2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 21\cdot\frac{1}{9}-2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 21^{\frac{1}{2}}}{3}\cdot\left(\frac{14}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}-2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 21^{\frac{1}{2}}}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{8}{9}\cdot 21^{\frac{1}{2}}=\frac{8}{9}\sqrt{21}.$$

將 x 代回原式,可得

$$\sqrt[3]{4+\frac{8}{9}\sqrt{21}}+\sqrt[3]{4-\frac{8}{9}\sqrt{21}}=\sqrt[3]{4}$$

以上的計算步驟能否進一步推廣,求得更一般的情況呢?

比較 $2\sqrt{\frac{7}{3}}$ 與 $\frac{8}{9}\sqrt{21}$,不難看出,它們都含有根式 $\sqrt{21}$. 若將上式的 4 改為一般的整數 n,則 n 用表示出的 x 是否也含有根式 $\sqrt{21}$ 呢?

同樣地,設待定部分為 x,則有

$$\sqrt[3]{n+x}+\sqrt[3]{n-x}=\sqrt[3]{n}.$$

接下來,我們可以照葫蘆畫瓢.

設 $\sqrt[3]{n+x}=a$, $\sqrt[3]{n-x}=b$,則 $a+b=\sqrt[3]{n}=n^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots$①,又有

$$\begin{cases} a^3=n+x\cdots\cdots ② \\ b^3=n-x\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② + ③,得

$$a^3 + b^3 = 2n$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = 2n.$$

把 ① 代入上式,得

$$n^{\frac{1}{3}}(a^2 - ab + b^2) = 2n$$

$$a^2 - ab + b^2 = 2n^{\frac{2}{3}} \cdots\cdots ④$$

由 ①,得

$$(a + b)^2 = (n^{\frac{1}{3}})^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = n^{\frac{2}{3}} \cdots\cdots ⑤$$

⑤ - ④,得

$$3ab = -n^{\frac{2}{3}}$$

$$ab = -\frac{1}{3} \cdot n^{\frac{2}{3}} \cdots\cdots ⑥$$

我們有$\begin{cases} a + b = n^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots ① \\ ab = -\frac{1}{3} \cdot n^{\frac{2}{3}} \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$,構造實根為 a 和 b 的關於 t 的二次方程為

$$t^2 - n^{\frac{1}{3}} \cdot t - \frac{1}{3} \cdot n^{\frac{2}{3}} = 0.$$

根據求根公式,可得

$$t = \frac{-(-n^{\frac{1}{3}}) \pm \sqrt{(-n^{\frac{1}{3}})^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot n^{\frac{2}{3}}\right)}}{2}$$

$$t = \frac{n^{\frac{1}{3}} \pm \sqrt{n^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} \cdot n^{\frac{2}{3}}}}{2}$$

$$t = \frac{n^{\frac{1}{3}} \pm \sqrt{\frac{7}{3} \cdot n^{\frac{2}{3}}}}{2}$$

$$t = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{2} \pm \left(\frac{21^{\frac{1}{2}}}{3} \cdot n^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{2} \pm \frac{21^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}}}{6}.$$

由 a,b 的對稱性,不妨設 $a > b$,則

$$\begin{cases} a = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{21^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}}}{6} \cdots\cdots ⑦ \\ b = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{2} - \frac{21^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}}}{6} \cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

②－③,得

$$a^3 - b^3 = 2x$$

$$x = \frac{(a-b)[(a-b)^2 + 3ab]}{2}.$$

把 ⑥、⑦ 和 ⑧ 代入上式,可得

$$x = (21^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\left(21^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 - n^{\frac{2}{3}}\right] \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = (21^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(21 \cdot n^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{9} - n^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = 21^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{7}{3} \cdot n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$x = 21^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot n^{\frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{2}{9} \cdot 21^{\frac{1}{2}} n = \frac{2}{9}\sqrt{21}n.$$

可見 x 也含有公因數 $\sqrt{21}$. 將 x 代回原式,可得

$$\sqrt[3]{n + \frac{2}{9}\sqrt{21}n} + \sqrt[3]{n - \frac{2}{9}\sqrt{21}n} = \sqrt[3]{n}.$$

至此,我們把命題推廣到一般性的情況. 利用以上結論,還可以構造出各式各樣的等式. 下面就是與上面結論相關的練習題,讀者不妨嘗試做一做.

練習題:

1. 計算: $\sqrt[3]{7 + \frac{14}{9}\sqrt{21}} + \sqrt[3]{7 - \frac{14}{9}\sqrt{21}}$.

2. 計算: $\left(\sqrt[9]{8 + \frac{16}{9}\sqrt{21}} - 1\right)\left(\sqrt[6]{8 + \frac{16}{9}\sqrt{21}} + \sqrt[9]{8 + \frac{16}{9}\sqrt{21}} + 1\right) +$

$\left(\sqrt[9]{8 - \frac{16}{9}\sqrt{21}} - 1\right)\left(\sqrt[6]{8 - \frac{16}{9}\sqrt{21}} + \sqrt[9]{8 - \frac{16}{9}\sqrt{21}} + 1\right)$.

3. 證明: $\left(\sqrt[3]{n + \frac{2}{9}\sqrt{21}n} - \sqrt[3]{n}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{n - \frac{2}{9}\sqrt{21}n} - \sqrt[3]{n}\right) = -\frac{1}{3}n^{\frac{2}{3}}$.

4. 證明: $n + 3\sqrt[3]{-\frac{1}{27}n^2} \cdot \left(\sqrt[3]{n + \frac{2}{9}\sqrt{21}n} + \sqrt[3]{n - \frac{2}{9}\sqrt{21}n}\right) = 0$.

參考答案:

1. 解:根據結論可知,答案為 $\sqrt[3]{7}$.

2. 解:原式 $= \sqrt[3]{8 + \frac{16}{9}\sqrt{21}} - 1 + \sqrt[3]{8 - \frac{16}{9}\sqrt{21}} - 1 = \sqrt[3]{8 + \frac{16}{9}\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8 - \frac{16}{9}\sqrt{21}} - 2$.

由結論得 $\sqrt[3]{8}-2=2-2=0$；

3. 證明：由結論可知$\begin{cases}\sqrt[3]{n+\frac{2}{9}\sqrt{21n}}-\sqrt[3]{n}=-\sqrt[3]{n-\frac{2}{9}\sqrt{21n}}\cdots\cdots① \\ \sqrt[3]{n-\frac{2}{9}\sqrt{21n}}-\sqrt[3]{n}=-\sqrt[3]{n+\frac{2}{9}\sqrt{21n}}\cdots\cdots②\end{cases}$

把 ① 和 ② 代入左式，得：

$$左式=\left(\sqrt[3]{n+\frac{2}{9}\sqrt{21n}}\right)\left(\sqrt[3]{n-\frac{2}{9}\sqrt{21n}}\right)=\sqrt[3]{n^2+\frac{84}{81}n^2}=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}n^2}=-\frac{1}{3}n^{\frac{2}{3}}.$$

等式成立.

4. 證明：由結論得：

$$左式=n+3\sqrt[3]{-\frac{1}{27}n^2}\cdot\sqrt[3]{n}=n-3\cdot\frac{1}{3}n^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{n}=n-n^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=n-n=0.$$

等式成立.

促進專業成長授課計劃之教案

一元二次方程根與係數的關係(韋達定理)的應用

澳門數學教育研究學會常務理事　鄧海棠

教案是教學過程中的重要一環. 教案是課堂教學思路的可行性方案. 編寫教案的過程是教師對備課中所做的各種課堂教學設想的最後酌定過程,是使教學內容系統、科學、完善、條理、深化的過程. 一份優秀教案是設計者教育思想、智慧、動機、經驗、個性和教學藝術性的綜合體現. 通過編寫教案不僅可以使教師明確教學目標、掌握教學方法、創新教學模式,還能使教師在教學過程中實現自我學習、自我提高、自我發展,更有利於教師教學經驗的積累、傳播.

基於班級設置,本教案是為了學習的基礎和能力都有一段較大的差距的班級而設計,故而教案中體現出既力保教學質量又盡可能追求課堂容量,力求大面積的同學都能掌握相關知識,摒棄為求題目數量而犧牲和放棄中下層面的學生.

教案具體如下:

<table>
<tr><td>學科:數學</td><td colspan="2">班級:高三 B</td><td>學生人數:27</td><td>執教老師:鄧海棠</td></tr>
<tr><td colspan="5">課題:一元二次方程根與係數的關係(韋達定理)的應用 本單元/課(第三節)</td></tr>
<tr><td colspan="5">授課日期及時間:2019 年 10 月 25 日 星期五第七節(時間:50 分鐘)</td></tr>
<tr><td colspan="5">具體教學目標(授課教節)</td></tr>
<tr><td colspan="2">A. 知識與技能</td><td colspan="2">B. 過程與方法</td><td>C. 情感、態度與價值觀</td></tr>
<tr><td colspan="2">會用一元二次方程根與係數的關係(即韋達定理及其逆定理)來確定字母係數的值,會用之求關於兩根的對稱式的值,能根據已知方程的根構造滿足某些要求的新方程. 掌握配項方法(把某些代數式配成兩根和與積的形式才能將係數代入).</td><td colspan="2">韋達定理體現了整體思想. 在運用關係解決問題的過程中,培養學生解決問題能力,滲透整體的數學思想,求簡思想.</td><td>培養學生觀察、聯想、分析的能力,滲透化歸、推理的數學思想,提高學生綜合運用基礎知識分析解決較為複雜問題的能力. 培養學生探究發現規律的興趣及敢於探索規律的精神. 體會特殊到一般,再由一般到特殊的認知事物的規律.</td></tr>
</table>

重點:1. 會用韋達定理求代數式的值;

2. 能應用韋達定理求待定係數;

3. 會應用韋達定理構造方程,解方程組;

4. 能應用韋達定理分解二次三項式.

難點:求關於兩根的對稱式的值,熟練運用完全平方和(與差)公式以及立方和公式.

教學內容:

通過整體思想,不解方程,用兩根之和與積或各係數就可解決問題(這時解了方程反而更麻煩). 掌握配項方法,把某些代數式配成兩根和與積的形式才能將係數代入. 通過構造方程,解方程組. 結合完全平方和(與差)公式以及立方和公式,應用韋達定理分解二次三項式.

教學過程

教學活動	教學設計意圖
一. 問題引出 1. 求方程 $x^2 - x = 0$ 的兩個根之積.	[淺出問題]一般而言,學生不會直接想到用韋達定理,反而會通過求出方程的兩個根來相乘.
二. 問題深化 2. 求方程 $2018x^2 - 201920202021x + 1 = 0$ 的兩個根之積.	[深化問題]因數值巨大,學生想通過求出方程的兩個根來相乘,已經不可行了. 危機產生壓力,壓力化為動力,動機適時出現.
三. 問題更新 3. 已知方程 $x^2 - mx + 2 = 0$ 的一個根是 $x = 1$,求此方程的兩個根之積.	[更新問題]學生一般都會把 $x = 1$ 代入方程求出 m 值,確定方程式,再求出另外一個根,把兩個根相乘.
四. 問題昇華 4. 已知方程 $2018x^2 - 201920202021mx + 2 = 0$ 的一個根是 $x = 20192020$,求此方程的兩個根之積.	[昇華問題]因數值巨大,學生想通過把 $x = 20192020$ 代入方程求出 m 值,確定方程式已經不可行了. 危機再現,壓力加大,動機增強.
五. 解題必殺技,因(動)機以發 一元二次方程的一般形式為:$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$, 當 $\triangle \geq 0$ 時,由求根公式得其根為 $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$,$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$, 進而得:$x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$;	韋達定理的出現水到渠成,應運而生. 韋達定理體現了整體思想,作為一種解題方法,整體思想求解是一個解題技能,而且,分開去求解方程的兩個根,不但麻煩(運算量大),也未必可行.

$x_1x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} = \dfrac{(-b)^2-(\sqrt{\triangle})^2}{(2a)^2}$ $= \dfrac{b^2-\triangle}{4a^2} = \dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$. 這一組式子體現了一元二次方程的根與係數的數量關係,人們稱之為韋達定理.	作業中有安排學生課後查閱資料,了解為什麼稱一元二次方程根與係數的關係式為韋達定理,以增進了解數學史料.
六. 定理應用 引導學生解決問題的第 2 和第 4 題. 公式回顧 完全平方和(與差)公式:? 和的立方公式:? ------(可以聯想楊輝三角) 立方和公式:?	牛刀小試, 展露鋒芒, 體現成功. 公式聯想回顧,既用新又溫故.
七. 知識遷移 5. 設方程 $x^2-10x-2019=0$ 的兩個根為 x_1,x_2,求下列各式的值. (1) $x_1^2+x_2^2$; (2) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; (3) $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$; (4) $(x_1-x_2)^2$; (5) $\lvert x_1-x_2\rvert$; (6) $(x_1-3)(x_2-3)$; (7) $x_1^3+x_2^3$.	十. 中的(1) 求 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ 可以看成是本題承接(2) 與(3) 之間的一個小題. (7) 可以用公式法循兩個方向求解:$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$ $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$
八. 知識拓展 6. 根據條件求值: (1) 若 $m^2-10m-2019=0, n^2-10n-2019=0$,求 m^2n+mn^2 的值. (2) 若 $m^2-10m+2019=0, n^2-10n+2019=0$,求 m^2n+mn^2 的值.	(1) 先分析目標式,再引出和與積,尋找方程形式. (2) 由於 $\triangle<0$,方程無實根. 不過,應該沒有學生會注意到這一點. 暴露錯誤思維(缺陷),<u>為了以後的正確而錯誤</u>.
九. 構造方程 7. 猜猜它是誰? (1) 求作一元二次方程,使它的兩根分別為 1 和 2 . (2) 求作一元二次方程,使它的兩根分別為 x_1 和 x_2. (3) 解方程組 $\begin{cases} m+n=20 \\ mn=36 \end{cases}$. (4) 在解方程 $x^2+px+q=0$ 時,梁曉桐看錯了 p,解得方程的根為 1 與 -3;李芷瑤看錯了 q,解得方程的根為 4 與 -2. 這個方程的根應該是什麼?	(1) 可以借鑒第 1 題的兩根的方程構造. 開放性題目,<u>答案不唯一</u>. (2) 特殊到一般,演繹到歸納. 開放性題目,<u>答案不唯一</u>. (3) 一般到特殊,歸納到演繹. (4) 考驗批判性思維、檢驗逆向性思考、檢查靈活性思維品質.

十. 四校速遞,即堂評量 (1)[2016 四校聯考正卷 8] 若 a 和 b 為方程 $2x^2-x-5=0$ 的兩個不相同的根,則$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=?$ (2)[2018 四校聯考正卷 3] 若方程 $3x^2-4x+k=0$ 的兩根之差是 $\frac{5}{3}$,則 $k=?$ (3)[以 2019 四校聯考正卷 12 改造] 以方程 $x^2-3x+2=0$ 的兩個根的 4 倍為根的一元二次方程是?	四校聯考不再遙遙無期,未來已來(途中). 四校速遞環節,讓學生感受一下緊迫感,激發學生學習動力和壓力. 即堂評量可以當堂即學即測,檢驗學生的學習效果的同時,也為下一節課提供了指向性. (1) 中求$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$可以看成是七. 中 5. (2) 的延伸,也可以看成是(2) 與(3) 之間的一個小題.
十一. 嘗試讓學生小結題型和解題步驟等.	讓學生闡述學習成果,課堂收穫.
十二. 週末作業佈置: 1. 當 k 取何值時,方程 $3x^2-2(3k+1)x+3k^2-1=0$; (1) 有一根為 0 ; (2) 有兩個互為相反數的實數根; (3) 兩根互為倒數. 2. [校本 $P127$ 第 11 題] 設 3 是方程 $5y^2+ky+6=0$ 的一個根, 求另一根及 k 之值. 3. [校本 $P127$ 第 10 題] 設 α 和 β 是方程 $x^2-kx+3=0$ 的根, 其中 k 是正常數. (a) 用含 k 的式表 $(\alpha-2)+(\beta-2)$ 和 $(\alpha-2)(\beta-2)$. (b) 設 $(\alpha-2)$ 和 $(\beta-2)$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根, 其中 p 和 q 是常數,求 p 和 q (用 k 表示). 4. [2019 四校聯考正卷 12] 以方程 $x^2-3x+1=0$ 的兩個根的平方為根的一元二次方程是? 5. 課後查閱資料,了解一下為什麼稱一元二次方程根與係數的關係式為韋達定理? 6. 拓寬視野,增廣見聞:查找一元高次方程的根與係數的關係式(韋達定理的高階推廣).	由於時近週末,做功課的時間相對充足,因而在緊緊圍繞教學目標和重點、難點,以及課上的知識點的基礎上,設置一些既溫故又鞏固的題目練習. 與之前出現的各種情況前後呼應,先學後練再習,螺旋式向上升. 對於一元二次方程根與係數的關係(韋達定理)"與三角形的結合判斷三角形的形狀、與三角函數的結合求三角函數的值"等等的其他綜合應用,則是計劃安排在下一個課節進行.

十三. 課情、學情、教情、考情介紹： 一元二次方程是人教版第 21 章（初呈三年級、九上）的內容，它的根與係數的關係（韋達定理）是一個重要的內容，也是考試、測驗、競賽、比賽的熱點和焦點所在. 學生初三已經學習過這部分的內容，是以，本課節兼具簡單學習與複習鞏固的雙重任務. 結合完全平方和（與差）公式、二次三項式的因式分解以及立方和公式的綜合運用，對學生的數學能力有一定高度的要求. 教師通過深入淺出、一題多型、多題一型的設計，運用解題危機產生壓力、壓力化為動力、動力激發動機的教學呈現方式，讓學生探究、比照，從師生互動、生生互動中完成教學任務，緊緊圍繞教學重點內容和關鍵性的地方，通過設置學生不會注意到的細節問題讓學生暴露錯誤思維（缺陷），加強思維品質的培養，達成教學目標，不知不覺之間開始培養活躍思維和發散思維習慣，加強歸納概括能力，接觸逆向思維和分類思想. 本章節是澳門四校聯考數學正卷考試大綱第 5 點："二次方程及二次函數：根與係數的關係" 的要求. 在 2016 ~ 2019 這四年間共有三年的題目涉及到運用本課節的知識點作考查.	韋達定理體現了整體思想，作為一種解題方法，在代數式變形，解方程（組），解不等式，研究函數乃至幾何、三角運算中都有非常廣泛的應用. 求代數式的值，求待定係數，構造方程，解特殊的二元二次方程組，二次三項式的因式分解求值都是重要的基本技能. 根系關係的三大用處：計算對稱式的值，構造新方程，定性判斷字母係數的取值範圍（在作業體現，凸顯培養學生課後探究能力）.
十四. 板書內容： 一元二次方程根與係數的關係（韋達定理） $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. 完全平方和（與差）公式：? 和的立方公式：? 立方和公式：?	1. 書寫課題，突出課堂主題. 2. 韋達定理，偉在達得有理. 3. 兩根之和，負係數一比二. 4. 兩根之積，正係數常比二. 5. 公式回顧，既用新又溫故.

當然，人無完人，總會有疏漏和不足之處，本著拋磚引玉的意願，筆者希望得到相關同仁、有識之士和教育行家的指導和斧正，從而獲得促進專業成長的教學感悟和能力的提升.

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A
電話:853 - 28965253,853 - 66878553 傳真:853 - 28788259
E - mail: macaumath@yahoo.com.hk , inwmacau@yahoo.com.hk
Website:http://www.mathsmo.com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日	在氹仔海島公證署辦理本會註冊手續。

2003 年

6 月 7 日	舉辦"中國數學教學的雙基原理 —2002 年數學教育高級研討班"——會議精神傳達報告會。
12 月 13、14 日	舉行中小學"數學開放題教學" 專題研討會及示範課。
12 月	《澳門數學教育》創刊號出版。

2004 年

4 月 17 日	舉辦"DM_Lab 和動態數學教學" 講座。
9 月 30 日	赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學。
10 月 9、10 日	舉行"數學情景與提出問題教學" 專題研討會及示範課。

2005 年

3 月 24 - 28 日	赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。
4 月 16 日	與教育出版社合辦"突破兒童數學思維空間" 研討會及《新思維數學》教材展覽會。
11 月 26、27 日	舉行"全國小學特級數學男教師教學風采展示" 專題研討會及示範課。
12 月 20 - 28 日	前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

2006 年

3 月 4 日	舉辦"因材施教、拔尖保底 —— 如何幫助數學差生學習" 專題研討會。

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課。

6 月 25 －29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。

12 月 9 －10 日　舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”。

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”。

7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學：一個國際視角”及“有效數學教學實務：美國的經驗”講座。

7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。

9 月 1 日　舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座。

2008 年

11 月 1 日　舉辦“小學數學專家講座”。

11 月 22 日　舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議。

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽（ARML），榮獲國際組第一名。

8 月 15 日 ~ 20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中。

11 月 14 日　舉辦“數學教學的有效性與開放性”研討大會及示範課。

12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會。
（慶祝祖國成立 60 週年，澳門回歸 10 週年，本會成立 5 週年活動）

2010 年

6 月　成立“澳門數學奧林匹克學會”，政府憲報刊登該會章程。

11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。

1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。

9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”。

2012 年

6 月 9 日　舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課。

8 月 1 – 6 日　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。

11 月 3 – 4 日　舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”。

11 月 3 日晚上　舉行慶祝本會成立十週年晚宴，十週年成果展。

2013 年

4 月 6 日　舉辦亞太區小學奧數（澳門區）選拔賽。

4 月 14 日　進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 16 日　名譽會長陳明金先生宴請本會，表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。

5 月 11 日　舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”。

6 月 1 日　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽。

5 月 31、6 月 1 日　前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊第二。

6 月 15 – 19 日　舉辦數學實驗 —— 統計與概率工作坊。

7 月 10 日　澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。

7 月 18 日　舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽頒獎禮暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 1 – 7 日　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流。

11 月 16 – 17 日　與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會。

12 月 7 – 9 日　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級証書培訓班」。

12 月　《澳門數學教育》第十一期出版。

2014 年

1 月 11 日　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會。

4 月 3 日　拜訪澳門基金會。

4 月 13 日　進行中學第二十五屆、小學第十二屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 15 日　拜訪澳門教育暨青年局。

4 月 17 日至 21 日　赴臺灣澎湖、高雄參訪活動。

4 月 26 日　舉辦“史豐收速算法”介紹會。

5 月 30 – 31 日　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊第二。

6 月 14 日　舉行「領導數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動。

7 月 11 日　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班。

7 月 12 日　　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級証書頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 10 – 16 日　派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團。

10 月 18 日　　舉辦“熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課”。

11 月 22 – 23、

29 – 30 日　　舉辦“史豐收速算法”導師培訓班。

12 月 6 日、7 日　舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽(澳門賽區)。

12 月　　　　《澳門數學教育》第十二期出版。

2015 年

1 月 16 日　　拜訪澳門基金會。

1 月 31 日　　舉行成立“史豐收速算法”培訓基地新聞發佈會。

4 月 12 日　　進行中學第二十六屆、小學第十三屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 19 日　　拜訪澳門教育暨青年局。

5 月 10 日　　汪會長參加上海“小學數學教師教育高級研修班”。

5 月 23 日　　舉行「任勇的數學教學主張」講座。

5 月 28 – 31 日　前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。

5 月 29 – 30 日　前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊重獲冠軍。

6 月 13 日　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

6 月 3 – 7 日　澳門大學教育學院與本會合辦“數學整數教育”專題研討會。

6 月 6 日　　邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。

6 月 27 日　　往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。

7 月 11 日　　與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。

8 月　　　　《兩岸三地升大數學教程》出版。

8 月 8 – 12 日　澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。

8 月 15 – 20 日　赴陝西省進行學術交流。

10 月 17 日　　舉辦“幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課”。

12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆小學新思維數學‘澳門杯’課堂教學大賽評比大會”。

12 月 7 日　　獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。

12 月　　　　《澳門數學教育》第十三期出版。

2016 年

1 月 17 日　　　舉辦“兒童資優培育”介紹會。

3 月 5 日　　　舉辦“希望杯數學競賽試題分析”講座。

3 月 19 日　　　合辦“中、小學數學實驗和智力發展”專題講座。

5 月 26 – 29 日　前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。

6 月 3 – 4 日　　前往美國參加第 41 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊獲亞軍。

6 月 18 日　　　舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。

10 月 22 日　　舉辦“雲南麗江市教育局講座暨中學示範課”。

11 月 19 日　　舉辦“四川省成都市成華小學示範課”。

11 月 25 – 29 日 前往馬來西亞參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。

12 月 10 – 11 日 舉辦第二屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。

12 月　　　　《澳門數學教育》第十四期出版。

2017 年

3 月 11 日　　　慶祝十五周年會慶暨春茗聚餐。

5 月 25 – 28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。

6 月 2 – 3 日　　前往美國參加第 42 屆美國高中數學競賽（ARML）。

6 月 17 日　　　希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。

7 月 8 – 9 日　　舉行首辦「首屆奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽賽（2017）」。

9 月 12 日　　　拜訪譚俊榮司長。

11 月 4 日　　　舉辦“海峽兩岸小學數學課堂教學交流展示”。

12 月 9 日、10 日 舉辦第三屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。

12 月　　　　《澳門數學教育》第十五期出版。

2018 年

1 月 28 日　　　前往中山拜訪華星幼稚園。

4 月 28 日　　　舉辦「世界七大數學死題破解演講會」。

5 月 24 – 29 日　前往新加坡參加第 29 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。

6 月 1 – 2 日　　前往美國參加第 43 屆美國高中數學競賽（ARML）。

6 月 30 日 –
7 月 2 日　　　合辦 2018 三維杯環亞太國際數學邀請賽（香港舉行）。

7 月 7 日　　　希望杯、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。

5 月 25 －28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月　為香港名創教育（文達出版社）編輯的澳門基力數學探知 1A 和 1B 出版。
6 月 16 －17 日　前往深圳出席 2018 全國史豐收數學速算法大獎賽。
10 月 13 日　舉辦「使用漫畫進行數學教學 — 來自新加坡的經驗」講座。
11 月 10 日　舉辦「世界數學難題一尺解第二次講座」。
11 月 23 －27 日　前往馬來西亞力行華小學參加第 5 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 8 －9 日　第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題，為協辦單位。
12 月 15 日、16 日　舉辦常港澳小學「新思維數學」課堂教學邀請賽。
12 月　《澳門數學教育》第十六期出版。

2019 年

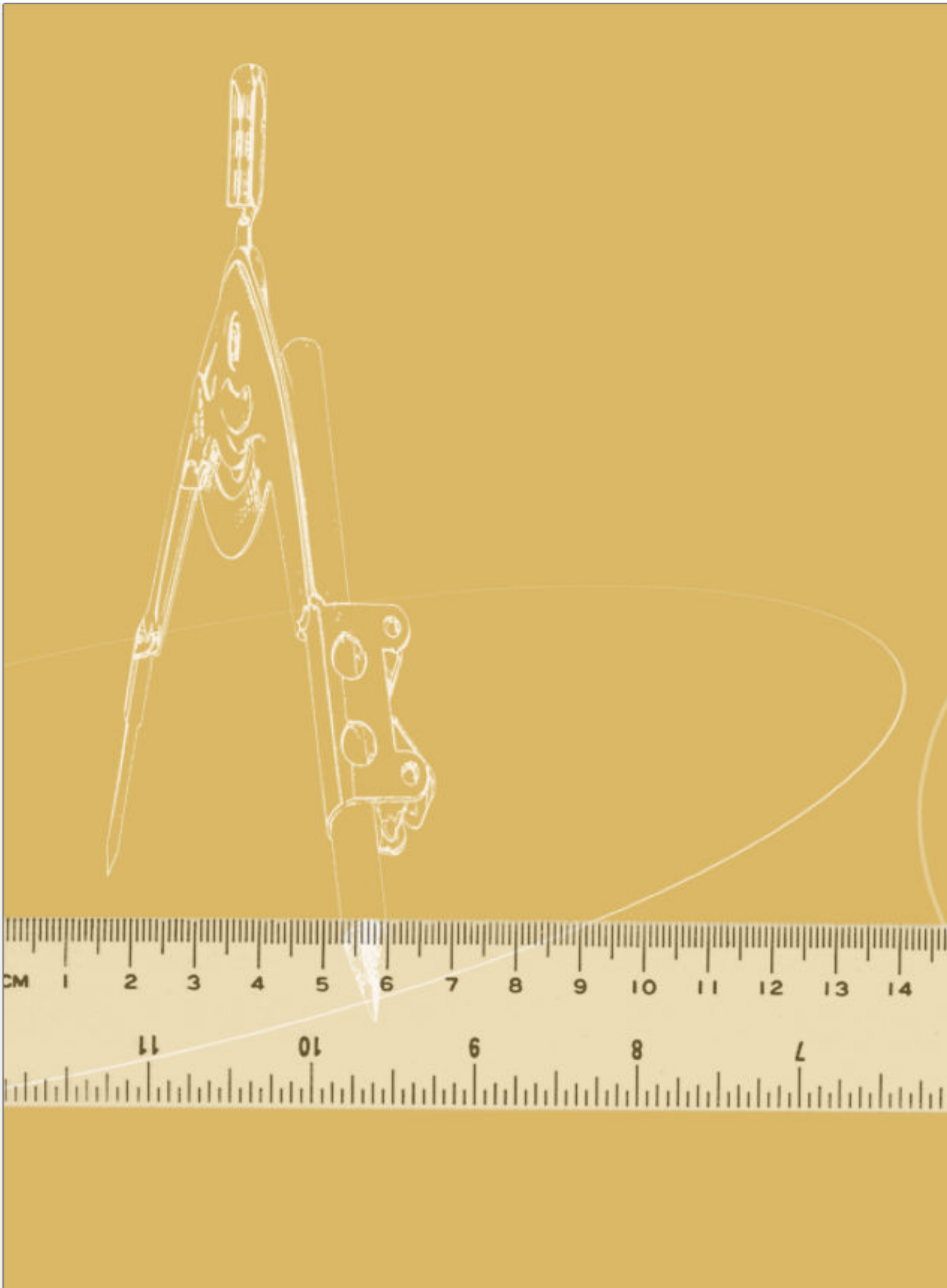
6 月 1 日　前往新加坡參加第 30 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 30 日 －
6 月 8 日　前往美國參加第 44 屆美國高中數學競賽（ARML）。
7 月 5 －8 日　主辦 2019 金蓮花杯國際數學邀請賽。
7 月 7 日　舉行金蓮花杯國際數學邀請賽、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月　為香港名創教育（文達出版社）編輯的澳門基力數學探知 2A 和 2B 出版。
11 月 22 －25 日　前往馬來西亞參加第 6 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 6 －7 日　為第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題，本會為協辦單位。
11 月 30 日、
12 月 1 日　舉辦「慶回歸 －－ 海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月　《澳門數學教育》第十七期出版。

2020 年

因疫情關係，使本會上半年活動都未能如期舉行
10 月 17 日　於勞工子弟學校禮堂舉辦「簡約教育的理論與實踐思考」講座。邀請徐長青院長（天津市紅橋區教師進修學校副校長、天津教科院紅橋區分院常務副院長）來澳主講。
11 月 28 －29 日　於浸信中學禮堂舉辦「海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
進入決賽老師：

澳門濠江中學附屬小學林雯君老師，課題：小四〈平行四邊形〉
江蘇南京師大附小賁友林老師，課題：小四〈雞兔同籠問題〉
澳門化地瑪聖母女子學校劉鶴老師，課題：小四、六〈小小魔術師〉
澳門培道小學張惠芳老師，課題：小五〈用字母表示數〉
深圳官田學校葉建雲老師，課題：小五〈倍數和因數〉
評委：方運加教授（首都師範大學數學系教授）、邱學華院長（特級教師、常州大學嘗試教育科學研究院院長、華東師大兼職教授）、朱海麟教授（上海建橋大學教務長、教授、浦東電視大學副校長）、史豐寶教授（史豐收國際教育研究中心、史豐收速算法推廣中心主任）、劉國特副院長（北京師聯時代文化教育出版公司經理、常州大學嘗試教育學院副院長、資深教育編審）。
評選結果：
一等獎：賁友林老師、葉建雲老師、張惠芳老師
二等獎：林雯君老師、劉鶴老師

12 月　《澳門數學教育》第十八期出版。


CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14