澳門数学教育（第十三期） 2015 年 12 月

目　　錄

在全美高中數學競賽（ARML）中成長的澳門代表隊 …… 汪甄南　施振雄　魏均橋　1

史豐收速算法與科學思維和創新人才 … 史豐收國際教育研究中心　11

我的數學教學"土"經驗 …… 任　勇　18

從"數學歸納法"與"數學演繹法"之爭談開來 …… 鄭志民　22

平均不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的理解及應用初步 …… 董淑珍　肖　芳　施振雄　40

平均不等式 $\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2} \geq \sqrt{\mathrm{ab}}$ 的兩種加強形式 …… 談　皓　45

用點圓與根軸定理巧解幾何題 …… 劉嘉德　48

搬動無限遠直綫 …… 李祥立　56

有趣的格子乘法 …… 文耀光　60

2016"希望杯"全國數學邀請賽（中學第二十七屆）報名人數統計表 …… 62

2016"希望杯"全國數學邀請賽（小學第十四屆）報名人數統計表 …… 63

會務活動紀錄 …… 64

澳門教育暨青年局
澳　門　基　金　會　贊助

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號：2877
地址：澳門南灣街 107 號
刊頭題詞：張奠宙教授
排版：廣源紙業文具行
印刷：文寶印務有限公司
刊號：ISSN 1814－2176

在全美高中數學競賽（ARML）中成長的澳門代表隊

汪甄南　施振雄　魏均橋

一、回顧參賽歷程

2009 年美國加州大學林觀坤教授來澳門,拜會時任教青局局長的蘇朝輝先生,談及全美高中數學聯盟(American Regions Math League) 所舉辦的數學競賽, 是一項歷史悠久的高中學生參加的國際性賽事, 而且這一賽事除了有個人賽(Individual Question) 之外, 還有團體賽(Team Round), 思考賽(Power Question) 以及接力賽(Relay Round), 這對考核學生的思維能力、運算能力、創新能力以及發揮團隊精神具有極大的幫助. 林教授說, 這一賽事已在全世界舉辦了 34 屆, 希望今年澳門能組隊參加.

在原教青局蘇朝輝局長和澳門基金會的大力支持下,把這一從基礎數學競賽中選拔尖子的任務, 安排給澳門數學教育研究學會承辦. 在全體理事的通力合作下,全澳門進行了廣泛的選拔和培訓, 並按要求正式選出了15位隊員和一位預備隊員, 第一次參加美國高中數學比賽的"澳門區代表隊"終於建成了.

正當我們全力準備赴美參賽時,一個突然的消息,逼使我們面臨到放棄的地步, 這就是新型流感 H1NA 在全球流傳,使臺灣、香港和北京等參賽隊伍在最後一刻都取消行程.

澳門怎麼辦?

在經過科學分析和做好充分的預防工作情況下, 澳門隊決定參賽!

下面是 2009 年 5 月 30 日美國世界日報在比賽當日對澳門隊的采訪報導:

「由ARML所舉辦的第34屆全美高中數學競賽美西地區,於29與30日在內華達大學拉斯維加斯校區(UNLV) 舉辦,這項比賽分四個地區共集結了全世界 3000 多位高中數學好手,共同解題較勁.

全美高中數學競賽,除了美西地區在 ULNY 舉行,同時還有其它三所大學也舉行不同地區的比賽,包括在賓州州立大學、喬治亞大學及愛阿華大學舉辦.

澳門隊是今年唯一來美參賽的亞州隊,教業中學的黃滋才同學表示: 從孩提時代開始就一頭栽進數學世界,他還表示相當享受當解開難題時,從中所獲得的莫大的成就感 ……這次率領澳門隊來賭城的澳門數學教育研究學會會長汪甄南和教練董淑珍紛紛指出,平時在教學學生時, 都會從簡單的題目教起,當學生建立自信後,才增加難度,若學生遇到難題

時,他們不會第一時間就告訴學生答案，反而是循循善誘，進而由學生自已找出答案. 所以父母也應這樣教道小孩，并且千萬不能因爲小孩成績不好，就加以責罵,這樣反倒讓小孩更抗拒學習數學.」

世界日報報導了在 ARML 競賽中澳門隊的出現,也報導了澳門隊是以什麽方法和理念去培訓學生數學能力的.

澳門隊的第一次參賽,獲得了國際組冠軍!黃滋才同學還獲得全場個人賽亞軍!

二、用創新思維做好隊員的選拔和培訓

2010 年澳門隊又將赴美參賽了. 擺在我們面前的重要任務是選拔優秀隊員和加強特別培訓. 因爲今年的賽事將會遇到更爲強大的對手 —— 中國隊. 爲了賽出澳門隊的水平，我們作出了一個重要的創新決定：

（1）在培訓過程中走澳門隊自已的路,用澳門隊自已的教練.

（2）在選拔隊員中我們作出了另一個決定,就是選拔隊員的要求將突破局限於高中的範圍,破格吸收優秀的初中學生,一起進行培訓. 這樣爲澳門隊以後的競賽梯隊的形成作好了準備.

具體的選拔和培訓,我們作了這樣的安排：

1. 用 1 個月的專題培訓及 4 輪的測試,最後確定 15 位正選隊員及 3 位備選隊員.

2. 15 位正選隊員和 3 位備選隊員繼續進行 1 個半月的培訓.

培訓分 4 個環節.

（1）**團體賽:**團體賽需 15 位隊員共同作答,最後只交一份答案. 基於賽題的考核內容分佈,在選拔出 15 位正選隊員時,除了考慮各個隊員的數學能力之外,還考慮每個隊員擅長的內容以及和其他隊員的配合度. 而在訓練過程中,由教練制定分配分工策略,由隊長執行,各位隊員配合,務求答的題數更多,得出的答案正確率更高.

（2）**思考賽:**與團體賽類似.

（3）**個人賽:**此環節,我們除了訓練學生的解題速度,解題的正確率,還訓練學生即場制定解題策略的能力,因爲有時必要的放棄才能獲得更多.

（4）**接力賽:**此環節,除了訓練每一小隊隊員的配合之外,更重要的是排位,哪位隊員的能力適合哪一棒,每一棒對數學能力的要求不一樣. 經過教練的大量測試與實踐,最終決定每位隊員的位置.

2010 年的賽事,由於中國隊的簽證問題,因而參賽人數不足,賽後結果是,澳

2010年奪冠時合影

門隊和中國隊取得相同總分,大會決定給於澳門隊和中國隊並列冠軍.

2009、2010 連續兩屆澳門隊在全美高中數學競賽(ARML)中,取得了國際組冠軍,極大地鼓舞了澳門學子學習數學的積極性,爲實現澳門特別行政區崔世安特首所提“教育興澳”的理念,作出了應有的貢獻.

三、全美高中數學競賽賽事簡介

The American Regions Mathematics League 的簡稱,即美國地區數學聯盟,或者叫全美高中數學競賽,因爲參賽選手全是高中學生.

ARML 比賽分四輪,每輪分數、時間、方式簡介

團體賽(Team Round)

1. 共 10 題 (5 分/題).
2. 考試時間:20 分鐘.
3. 作答方式:

(1) 全隊合力作答;

(2) 簡答;

(3) 全隊繳交一份答案卷.

思考賽(Power Round)

1. 共 10 題 (5 分/題).
2. 考試時間:60 分鐘.
3. 作答方式:

(1) 全隊合力作答;

(2) 須列出計算過程;

(3) 全隊繳交一份答案卷.

個人賽(Individual Rounds)

1. 每回 2 題,共五回 10 題 (1 分/題).
2. 考試時間:每回 10 分鐘,共 50 分鐘.
3. 作答方式:

(1) 個人獨立作答;

(2) 簡答;

(3) 每人均需繳交答案卷.

接力賽(Relay Rounds)

1. 共兩回,每回爲 3 小題之題組.

2. 考試時間:每回 6 分鐘,共 12 分鐘.

3. 作答方式：

(1) 三人一組,全隊 15 人分爲 5 組;

(2) 每組三人接力作答;

(3) 簡答;

(4) 由最後一人繳交答案卷;

(5) 分別於 3 分鐘及 6 分鐘時有兩次繳交答案卷的機會,若兩次都交卷,成績將以 6 分鐘時所繳交的答案爲給分標準. 若 3 分鐘交卷,答案正確得 5 分;若 6 分鐘交卷,答案正確得 3 分.

四輪比賽得分之和爲各隊最終分數,並以此進行團隊排名並頒獎. 個人名次根據個人賽的得分排名,如遇得分相等情況,則加賽一題,以最短時間內得出正確答案者勝出.

四、2015 年比賽現場追蹤

賽前我們得到的消息是,中國隊將派出了兩隊,臺灣隊也會派出兩隊參賽,這對我們 15 位隊員來說, 除了倍感壓力之外, 但也使得我們更加鬥志昂揚.

第一天.

團體賽:在大家的共同努力下,今年的團體賽成績大勝前幾屆. 雖然,比賽時發生了點小插曲,在交答案時,一位隊員交錯了答案,道致少了一題的分數,盡管如此,成績依然比以前提高得非常明顯. 成績是 25 分.

思考賽:思考賽一直是澳門代表隊的強項,它的特點是考核隊員的創意以及理解能力. 今年各位隊員的配合度非常高,成績是 29 分.

第二天.

個人賽:完全體現了培訓後各位隊員的數學水平,雖然,有一位隊員因爲身體不適, 無法參加比賽,最後這個環節只能以 14 人的分進行計算,成績是 63 分.

接力賽: 由於一位同學的退賽,道致有一個小隊無法進行此環節,所以只能以 4 個小隊進行比賽. 此環節是 4 個比賽環節中最難得分的環節,教練及隊員們在此環節的訓練中,花費了大量的心神,結果成績大勝前幾屆,最後此環節的成績是 12 分.

2015年奪冠時合影

個人賽的後續：其中一位隊員周昊天，由於個人賽成績優異，進入個人賽決賽，最終獲得全場個人賽亞軍.

比賽結果：本來在缺少一位隊員的情況下，對手又是長勝王者中國隊，因此，大家都以爲冠軍無望，只是希望能衛冕亞軍. 最終成績，澳門隊以總分 129 獲得冠軍，中國隊以 120 分獲得亞軍，菲律賓隊以 70 分獲得季軍.

賽後其他領隊紛紛來和我們交換隊服，其中一位美國領隊説，這是冠軍隊的隊服，具有勉勵學生的作用.

五、榮譽和責任

由於澳門數學教育研究學會所組織、選拔、培訓和帶領澳門隊參加全美高中數學競賽所取得的成績突出，2011 年第一次被特區政府授予"美國高中數學競賽" 澳門區代表隊**"功績獎狀"**.

2015 年的參賽，更彰顯出澳門隊全體隊員的數學功底和實力. 今年的選拔，我們特別選了一位初一的學生，作爲代表隊的正式成員，經過六個小時的激烈拼搏，**澳門隊總分超過了中國的兩個隊，臺灣的兩個隊，還有韓國隊，越南隊，菲列賓隊等，再一次取得國際組第一名. 當大會正式宣佈澳門隊為國際組冠軍時，全場為亞州這一小小地區的澳門，爆發出熱烈的掌聲和歡呼爭聲.**

"MACAU" 的歡呼聲再一次在美西地區 UNLY 校園響起.

2015 年 12 月 7 日全美高中數學競賽澳門區代表隊，第二次被特區政府授予"美國高中數學競賽" 澳門區代表隊"功績獎狀".

"為澳門爭光"，激勵著每 一位領隊、教練和隊員.

面對榮譽，澳門數學教育研究學會全體理事，全體澳門區代表隊成員一致表示，將繼續努力，教好數學，學好數學，爲推動與發展澳門的數學教育、爲培養好澳門特區的接班人才，作出進一步貢獻！

六、附録 ——2015 年 *ARML* 個人賽試題簡介

1. 正七邊形 *HEPTGON* 的周長比正方形 *ARML* 的周長長 2015. 設 $x = HE - AR$. 求 x 最大可能的整數值.

〔**解**〕答案爲 287.

設 $AR = y$，則 $HE = x + y$，依題意，有

$$7(x + y) - 4y = 2015,$$

$$7x + 3y = 2015,$$

$$x = \frac{2015 - 3y}{7},$$

$$x=287+\frac{6-3y}{7},$$

要使整數 x 最大,取 $y=2$,則 $x=287$. 故整數 x 的最大值爲 287.

2. 設 n 是最大的整數使得 n^n 是 $27^{27^{27}}$ 的因子. 求 n 的所有正因子的個數.

〔解〕答案爲 79.

我們有

$$27^{27^{27}}=27^{3^{3\cdot 27}}=27^{3^{81}}=(3^3)^{3^{81}}=3^{3^{82}}.$$

而 $n^n \mid 3^{3^{82}}$,設 $n=3^k$,則

$$n^n=(3^k)^{3^k}=3^{k\cdot 3^k},$$

故

$$k\cdot 3^k\leq 3^{82}\Rightarrow k\leq 3^{82-k}.$$

考察 $k=81,80,79,78$,發現 $k=78$ 時滿足條件,也就是說 k 的最大值爲 78. 從而 $n=3^{78}$.

故 n 的所有正因子爲 $1,3^1,3^2,\cdots\cdots,3^{78}$,共 79 個.

3. 一個長方體盒子有整數的邊長. 它的體積、面積和十二條邊的數值和爲 2015. 求盒子內對角線的長度.

〔解〕答案爲 $5\sqrt{19}$.

設長方體的長、寬、高分別爲 a,b,c. 不失一般性,設 $a\leq b\leq c$. 依題意,有

$$abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)=2015,$$

$$(bc+2b+2c+4)a+2bc+4b+4c=2015,$$

$$a=\frac{2015-4b-4c-2bc}{bc+2b+2c+4}.$$

而

$$a=\frac{2015-4b-4c-2bc}{bc+2b+2c+4}=\frac{2023-8-4b-4c-2bc}{(b+2)(c+2)}$$

$$=\frac{2023-2(b+2)(c+2)}{(b+2)(c+2)}=\frac{2023}{(b+2)(c+2)}-2.$$

注意到 $2023=7\times 17\times 17$. 注意到 $a\leq b\leq c$,因此 $b+2=c+2=17$,即 $b=c=15$,此時 $a=7-2=5$.

故盒子內對角線長度爲 $\sqrt{5^2+15^2+15^2}=5\sqrt{19}$.

4. 求最小的正整數 n 值,使得

$$\sum_{k=0}^{n}log_2\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)\geq 1+log_2\left(\frac{2014}{2015}\right).$$

〔解〕答案爲 3.

當 $n=0$ 時,有

$$log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)=log_2\frac{3}{2}=log_2\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)\geq 1+log_2\frac{3}{4}.$$

而 $\frac{3}{4}<\frac{2014}{2015}$,故不等式不成立.

當 $n=1$ 時,有

$$log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+log_2\left(1+\frac{1}{4}\right)=log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\right)=log_2\left(2\cdot\frac{15}{16}\right)=1+log_2\frac{15}{16}.$$

而 $\frac{15}{16}<\frac{2014}{2015}$,故不等式不成立.

當 $n=2$ 時,有

$$\begin{aligned}&log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+log_2\left(1+\frac{1}{4}\right)+log_2\left(1+\frac{1}{16}\right)\\&=log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\right)=log_2\left(2\cdot\frac{255}{256}\right)=1+log_2\frac{255}{256}.\end{aligned}$$

而 $\frac{255}{256}<\frac{2014}{2015}$,故不等式不成立.

觀察以上規律,可發現 $16=4^2$,$256=16^2$,因此當 $n=3$ 時,有

$$\begin{aligned}&log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+log_2\left(1+\frac{1}{4}\right)+log_2\left(1+\frac{1}{16}\right)+log_2\left(1+\frac{1}{256}\right)\\&=1+log_2\frac{256^2-1}{256^2}=1+log_2\frac{65535}{65536}.\end{aligned}$$

而 $\frac{65535}{65536}>\frac{2014}{2015}$,故不等式成立.

故 n 的最小值爲 3.

5. 函數 f 對任意 x 皆滿足 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$. 已知 $f(20)=15$ 且 $20=f(15)$,求 $f(20152015)$.

〔**解**〕答案爲 -5.

記 $f(x)=a_x$,由 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$,可得

$$a_n=a_{n+1}+a_{n-1},$$

$$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}.$$

而 $f(20)=15$,$20=f(15)$,則 $a_{20}=15$,$a_{15=20}$. 設 $a_1=p$, $a_2=q$,則

$$a_3=q-p,$$

$$a_4=-p,$$

$$a_5=-q,$$

$$a_6=p-q,$$

$$a_7=p,$$

$$a_8=q.$$

觀察規律可知,數列的循環爲$(p,q,q-p,-p,-q,p-q)$,週期爲 6,因此

$$a_{20}=a_2=q=15,$$

$$a_{15}=a_3=q-p=20\Rightarrow p=-5.$$

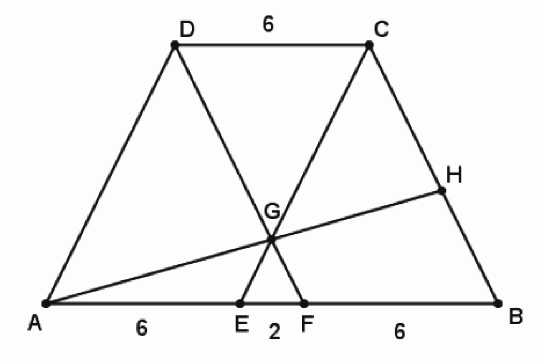
而 $20152015\equiv 1(mod 6)$,故

$$f(20152015)=a_{20152015}=a_1=-5.$$

6. 在以$\overline{AB}$和$\overline{CD}$爲底的梯形 $ABCD$ 中,$AB=14$,$CD=6$. 點 E 和 F 在$\overline{AB}$上使得$\overline{AD}\parallel\overline{CE}$且$\overline{BC}\parallel\overline{DF}$. 線段$\overline{DF}$和$\overline{CE}$相交於 G,$\overline{AG}$交$\overline{BC}$於 H. 求$\frac{[CGH]}{[ABCD]}$.

〔解〕答案爲$\frac{27}{160}$.

如下圖所示,易知$AE=6$,$EF=2$,$FB=6\because CD\parallel EF\therefore CG:GE=CD:EF=6:2=3:1$,



由 Menelaus 定理,可得

$$\frac{BH}{HC}\frac{CG}{GE}\frac{EA}{AB}=1,$$

$$\frac{BH}{HC}\frac{3}{1}\frac{6}{14}=1,$$

$$\frac{BH}{HC}=\frac{7}{9}.$$

於是

$$\frac{[CGH]}{[ABCD]}=\frac{[CGH]}{[CEB]}\frac{[CEB]}{[ABCD]}=\frac{CH\cdot CG}{CB\cdot CE}\frac{BE}{AB+CD}=\frac{CH}{CB}\frac{CG}{CE}\frac{BE}{AB+CD}$$

$$=\frac{9}{7+9}\frac{3}{3+1}\frac{2+6}{14+6}=\frac{27}{160}.$$

7. 設f定義爲$f(x)=x^3-49x^2+623x-2015$, 又設$g(x)=f(x+5)$. 求g 的所有根的和.

〔解〕答案爲 34 .

設 x_1,x_2,x_3 是$f(x)=0$ 的三個根,由韋達定理可得

$$x_1+x_2+x_3=49.$$

易知 x_1-5,x_2-5,x_3-5 是$f(x+5)=0$ 的三個根,也就是說它們是$g(x)=0$ 的三個

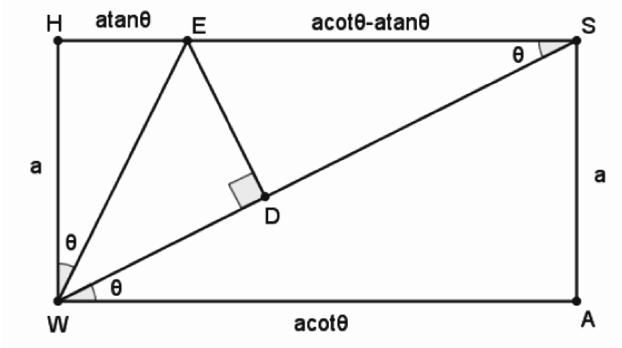
根. 故 g 的所有根的和爲

$$(x_1-5)+(x_2-5)+(x_3-5)=x_1+x_2+x_3-15=49-15=34.$$

8. 在長方形 $WASH$ 中,E 在 $\overline{SH}$ 上使得 $\angle AWS \cong \angle HWE$. 點 D 在 $\overline{WS}$ 上使得 $\overline{ED} \perp \overline{WS}$. 給定 $[WASH]=100$ 和 $[SED]=32$,求 $sin\angle SEW$.

〔**解**〕答案爲 $\dfrac{4+4\sqrt{6}}{25}$.

如下圖所示,設 $WH=a$, $\angle AWS=\angle HWE=\theta$.



依題意,有

$$\frac{[SED]}{[WAS]}=\frac{32}{100\times\frac{1}{2}}=\frac{16}{25},$$

又
$$\frac{[SED]}{[WAS]}=\frac{SE^2}{SW^2}=\frac{(acot\theta-atan\theta)^2}{a^2+a^2cot^2\theta}=\frac{(cot\theta-tan\theta)^2}{1+cot^2\theta}$$
$$=\frac{(cot\theta-tan\theta)^2}{1+cot^2\theta}\,\frac{tan^2\theta}{tan^2\theta}=\frac{(1-tan^2\theta)^2}{tan^2\theta+1}=\frac{(2-sec^2\theta)^2}{sec^2\theta}$$
$$=\frac{(2-sec^2\theta)^2}{sec^2\theta}\,\frac{cos^4\theta}{cos^4\theta}=\frac{(2cos^2\theta-1)^2}{cos^2\theta}=\frac{cos^2 2\theta}{\frac{1}{2}(1+cos2\theta)}$$
$$=\frac{2cos^2 2\theta}{1+cos2\theta}.$$

由此可得

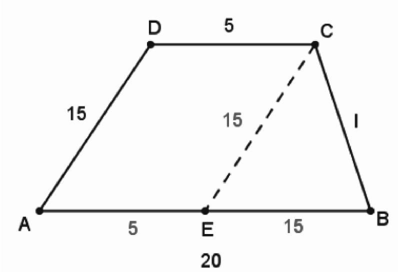
$$\frac{2cos^2 2\theta}{1+cos2\theta}=\frac{16}{25},$$
$$25cos^2 2\theta-8cos2\theta-8=0,$$
$$cos2\theta=\frac{4+6\sqrt{6}}{25}\text{或}\frac{4-6\sqrt{6}}{25}(\text{舍去}).$$

故 $sin\angle SWE=cos2\theta=\dfrac{4+6\sqrt{6}}{25}$.

9. 一個(a,r,m,l) 梯形是一個底爲 a 和 r、另兩邊長爲 m 和 l 的梯形. 求所有正整數 l 的數目,使得存在$(20,5,15,l)$ 梯形.

〔解〕答案爲 29 .

如下圖所示,過 C 作 $CE \parallel DA$ 交 AB 於 E,易知 $AE = 5, EB = 20 - 5 = 15$.



要使$(20,5,15,l)$ 能構成梯形,只需使$(15,15,l)$ 能構成三角形即可,因此

$$15 - 15 < l < 15 + 15,$$

$$0 < l < 30,$$

$$1 \leq l \leq 29 .$$

故 $l = 1,2,\cdots,29$,共有 29 個可取值.

10. 六個不同高度的人排隊去買甜圈. 他們頭到尾排成了一行,沒有三個連續的人的高度按遞增排列,求這樣的排法數.

〔解〕答案爲 349 .

設六個位置依次爲$p_1p_2p_3p_4p_5p_6$,設A爲$p_1p_2p_3$位置的人的高度按遞增排列的事件. B爲$p_2p_3p_4$ 位置的人的高度按遞增排列的事件,C 爲 $p_3p_4p_5$ 位置的人的高度按遞增排列的事件,D爲$p_4p_5p_6$ 的人的高度按遞增排列的事件. 又設$|X|$爲X事件發生的數目,由容斥原理,可得

$$\begin{aligned}&|A \cup B \cup C \cup D|\\ &= (|A|+|B|+|C|+|D|)-(|A \cap B|+|A \cap C|+|A \cap D|+|B \cap C|+|B \cap D|+\\ &\quad |C \cap D|)+(|A \cap B \cap C|+|A \cap B \cap D|+|A \cap C \cap D|+|B \cap C \cap D|)-\\ &\quad |A \cap B \cap C \cap D| .\end{aligned}$$

我們有

$$|A| = |B| = |C| = |D| = C_6^3 \cdot 3! = 120,$$

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap D| = C_6^4 \cdot 2! = 30,$$

$$|A \cap C| = |B \cap D| = C_6^5 = 6,$$

$$|A \cap D| = C_6^3 = 20,$$

$$|A \cap B \cap C| = |B \cap C \cap D| = C_6^5 = 6,$$

$$|A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D| = 1,$$

$$|A \cap B \cap C \cap D| = 1,$$

因此$|A \cap B \cap C \cap D| = 120 \times 4 - 30 \times 3 - 6 \times 2 - 20 + 6 \times 2 + 1 \times 2 - 1 = 371$.

故沒有三個連續的人的高度按遞排列的排法數爲 $6!371 = 349$.

史豐收速算法與科學思維和創新人才

史豐收國際教育研究中心

史豐收速算法是國家在上世紀九十年代以個人姓名命名的一項科學成就和發明成果. 從 1970 年發明至今,經歷了國內轟動、國際走紅、成果迭出、迅速推廣、不斷完善的過程,並隨著時代的發展而凸顯出新的價值和作用. 一項科學成果,其意義有兩個方面:一是,成果本身的價值和作用,二是,成果帶來的啓示和借鑒,有時成果帶來的啓示和借鑒可能比它本身的價值和作用更重要,因爲成果是唯一的,作用也是有限的,而它帶來的啓示和借鑒則可以進行多維度的思考和解讀,這本身就是一項發散性、創造性的思維活動. 本文主要就史豐收速演算法與科學思維和創新人才的關係作一些粗淺的分析和闡述.

一、史豐收速算法是科學思維的成果和創新思維的産物.

史豐收速演算法有幾句比較經典的表述,叫做從高位算起,不列運算程式,不用計算工具,一口報出正確答案,這也是它的四個主要特點,這本身就突破了一些傳統的思維和模式,具有科學創新性和發明創造性,其主要體現在於下述四個方面:

一是,速度快於計算器,展示了人腦的無限潛力. 我們國家有著悠久的計算歷史,在長期的計算實踐中,古人以極高的智慧發明了算盤這一計算工具,使計算能力和計算速度大大提高. 近現代以來又産生了電子計算器,使人們的計算能力和計算速度發生了質的飛躍. 在計算方面,人腦不如算盤,算盤不如計算器,是一個基本的普遍的現象. 而史豐收的計算速度以及經過史豐收速演算法系統學習培訓並達到一定程度的人計算速度則明顯快於算盤,並超過了電子計算器. 可以說,史豐收速演算法的發明和推廣,證明了在計算方面人腦可以超過電腦,展示了人腦在計算思維、智慧開發方面蘊含的巨大潛能,對今天我們發揮人腦作用,進行思維科學研究具有積極的啓示意義.

二是,能激發學習興趣,使計算不再枯燥和令人生畏. 計算是一項非常枯燥、煩瑣且令人生畏的事情,而對於學習和運用史豐收速演算法的少年兒童,則表現出較強的學習興趣和較高的專注力. 連續多年全國和各地的"史豐收速演算法少兒大獎賽",每場一百多名5 – 12 歲的兒童興趣盎然,神情專注,思維敏捷,速度驚人,在他們看來,計算這個枯燥的事情變得不再枯燥,而且充滿樂趣.

三是,開發大腦潛能,使人的思維能力得到鍛煉和提昇. 大腦越用越活,而史豐收速演算法就如同開發大腦的鑰匙和工具,在輕鬆的狀態下用腦,防止腦子的懶惰和退化,使人的

思維更加活躍. 學習史豐收速演算法後,家長、老師和學生普遍反映,學習興趣、理解能力和學習成績都得到提高.

四是,通過這種特殊的思路和創造,為科學思維和創新思維提供了一種啓示和借鑒. 這是最重要的. 一個成果本身是有限的,但是它的啓示是無限的,可以借鑒運用到別的科學研究,運用到我們的學習、工作和社會實踐中去.

說史豐收速演算法是科學思維的產物和創新思維的成果,是因爲有下述三個方面的理由:

一是,它是從對傳統計算理論與方法的大膽懷疑開始的. 科學是從懷疑開始的,如果一味的盲從、簡單的接受,那麼科學的生機就會受到限制. 傳統計算是從低位算起,從後向前進位,得出計算結果,幾千年來,古今中外都是這樣計算. 史豐收敢於對傳統提出懷疑,懷疑這一計算理論和方法的唯一性、絕對性. 在上小學三年級的時候就向老師提出,能不能從前向後算,使讀、寫、算一致起來,這可以算是他發明的最初動機和開端. 無數事實證明,只有具備科學思維,特別是創新思維的人,才敢於懷疑傳統、挑戰傳統、超越傳統. 哥白尼提出的“日心說”,就是對流傳一千多年的“地心說” 的懷疑、挑戰和超越. 法國著名的哲學家笛卡兒的“我思故我在” 就是一個系統全面懷疑的理論,唯一不懷疑的是正在思考著的自己,所以說“我思故我在”. 孟子說過一句話,叫“盡信書不如無書”,就是說不要完全的、盲目的、教條的相信書上的說法和傳統的東西.

二是,它是計算規律獨辟蹊徑的新發現. 世界上的規律很多,我們沒有了解、沒有探知的規律太多了. 就計算規律來說,傳統的乘法九九口訣表,我們一直背了幾千年,這是古人發現的計算規律. 但計算規律決不止這一個,史豐收速演算法的乘法29句口訣,就是探索和發現的一個新的計算規律,包括它的指算,也是把人的手當作計算工具和相應的計算規律的新發現. 所謂科學思維、創新思維,就是符合規律的思維,就是對規律的新發現、新認識和我們對已有規律的更全面的認識和把握. 史豐收速演算法符合這一特點,而且通過史豐收速演算法的啓示,今後可能還會發現新的、更好的計算規律.

三是,它是逆向思維和發散性思維的成功運用. 爲什麼說它是逆向思維?因爲傳統的演算法是從後向前算,而他這個演算法是從前向後算,剛好是相反的,所以是一種典型的逆向思維. 再一個他的指算,屬於典型的發散性思維,手的功能不僅是能寫字,能用筷子喫飯,能拿東西,而且也可以當成計算器. 大家如果有興趣研究的話,手還可能開發出新的功能,這就是發散性思維. 常規的思維往往是順向的、單向的,這就是我們碰到問題想不通、辦法少的主要原因. 任何事情往往朝著相反的方向想一下,多向的、發散性的思考一下,這個辦法行不通,其他的辦法行不行,可能思路就會豁然開朗,可能就會找到新的路子,展現出更多更好的辦法.

二、史豐收速算法發明過程對青少年學習知識、培養科學思維和創新思維的啓示.

現在大家往往都比較注重結果,而忽視了過程,其實,過程有時更重要,更爲豐富、生動,更能加深對結果的理解. 史豐收速演算法發明過程,對今天的青少年在學習知識、培養科學思維和創新思維方面的啓示,主要有四個方面:

(一)好奇心是學習與思考的牽引器和驅動力. 好奇心就是人們對未知的一種探究,對不了解的事物想去了解的這樣一種心理狀態,它是我們學習的內在動力,也是創新人才的重要特徵. 因爲只有好奇心才能激發興趣,才能深入進去,才能傾注你的熱情,才能爲此付出時間和精力. 史豐收就是一個充滿好奇心的人,50 多歲仍然保持著一顆天眞的童心,對許多事物都懷有好奇,遇事喜歡打破沙鍋問到底,特別是對數字的好奇,一直牽引著、驅使著他去探索、去創新、去發明. 事實上,許多科學家,特別是一些世界級的大科學家,都有著極強的好奇心. 牛頓對蘋果爲什麼能從樹上掉下來產生了好奇,並因此發現了萬有引力定律,瓦特也是對日常生活中再平常不過的從水壺中冒出蒸汽這一現象產生好奇,發明了蒸汽機原理. 培根說"知識是一種快樂,而好奇則是知識的萌芽". 孔子也說過同樣意思的一句話,叫做"知之者不如好之者,好之者不如樂之者". 學習發明都是這樣,如果你把它作爲快樂的事情,你就不會感到有壓力,效果就會事半功倍.

(二)想像力是知識的翅膀和思維的風帆. 人類社會的發展進步,有許多都是從想像開始的. 想像超越現實,最後往往變成現實,又在新的現實基礎上進行更高的想像. 女媧補天、后羿射日、敦煌飛天,都是古人美好而豐富的想像. 假如沒有飛離地面的想像,就沒有今天的飛機、火箭和太空船. 要讓知識能夠飛越障礙,自由翺翔,要讓思維能夠乘風遠航,不受局限,就必須藉助想像力. 史豐收本人就是一個極富想像力的人,小時候小朋友覺得最難學的是數學,怎麼能使數學變得不再難學,怎麼能夠不帶計算工具就能進行復雜運算,怎麼使計算不再那麼枯燥,這應該是他最早的一種想像,這種想像的萌發也催生了他發明的想法. 我們現在學習知識,運用知識,乃至創造知識,想像力都是十分重要的. 想像力是由此及彼、由點到面、由近到遠、由現實到超越現實的這麼一個聯繫、聯想的思維過程. 對於想像力愛因斯坦有一段話說得非常精彩,他說"想像力比知識更重要,邏輯會把你從 A 帶到 B,而想像力能帶你去任何地方." 這就是想像力的神奇和偉大,它超越了邏輯,它使我們的思維有著更爲廣闊的天地.

(三)批判精神是培養科學理性和獨立人格的利劍與階梯. 應該說,現代社會是比較缺乏批判精神的. 什麼叫批判精神?批判精神就是對以前和現有的知識、理論、經驗、方法,不是全盤接受、絕對認可、盲目順從的,而是審視的、懷疑的、甚至是否定的這麼一種態度和思維,它使我們不教條、不盲目、不盲從,從而具有科學理性和獨立人格. 事物都有不完善性,事物都處在發展變化之中,任何事物都有它值得否定的地方,哲學上有否定之否定規律,否定之否定就是一種批判精神. 從史豐收本人的批判精神來說,就是對計算的傳統方法、老師講授、思維慣性、公眾認可的懷疑、審視,乃至到部分的否定,這對一個當時的少年來說需要極大的勇氣和魄力.

(四)勤奮是通向聰明、通向天才、通向成功的鋪路石. 人有先天差異,不承認先天差異

不是唯物主義者,但是放大、誇大先天差異,更不是唯物主義者. 起碼實際情況不是這樣. 過去有一句話叫“天才 = 聰明 + 勤奮”,就是說先天差異只是潛在的,就如同電腦,再好的電腦,再高的配置,你不去使用它,它只是一種潛在的功能,只有在使用中才能體現出它的功能和作用. 史豐收少年成才,是一般人眼中的“天才”、“神童”. 其實,眞正成就他的是超越常人的勤奮,12 歲到 14 歲這三年時間他沒日沒夜的演算,家裏的牆上、地上甚至身上都寫滿了數字,這至少說明,有再強的好奇心,再豐富的想像力,再深刻的批判精神,沒有勤奮是不可能成功的.《中庸》裏邊有一段話,“人一能之,己百之;人十能之,己千之. 果能此道矣,雖愚必明,雖柔必強. ” 這就是說我們古代的聖人並不是認爲自己天賦好,比別人聰明,更不是生而知之,而是認爲自己“笨、愚、柔”,別人下一份功夫,我下一百份功夫,如果眞的能做到這樣,就是很笨的人都會變得很聰明,很柔弱的人都會變得很堅強.

三、史豐收速算法中蘊含的數位計算數學與知識思維和成才成功的關係.

數字、計算、數學,在我們的日常生活當中經常遇到,既是一門基本的、重要的知識和學科,同時又與其他知識、人的思維、人的成才成功有著非常重要、非常密切的關係. 這從以下幾個方面可以說明:

(一)世界是由數位組成的,認識世界從數位開始. 世界是由數字組成的,這是古代西方一個哲人說過的話,仔細想一想非常有道理,時間和空間的概念是由數字表述的,事物的大小、多少、發展變化也可以用數字來描述. 古希臘著名的思想家、哲學家、數學家畢達哥拉斯,最早悟出萬事萬物背後都有數的法則在起作用,認識到無論是解釋外在物質世界,還是描寫內在精神世界,都不能沒有數字. 我國古代偉大的哲學家老子說,道生一,一生二,二生三,三生萬物. 現代社會數字的作用更加重要,每個人須臾不可離開. 因此,要認識這個世界,就要首先了解和認識數位.

(二)宇宙萬物是通過計算來認識和描繪的. 無論是古希臘天文學家托勒密創立的地心說,還是波蘭天文學家哥白尼創立的日心說,都是通過觀測和計算來建立自己的學說體系. 沒有觀測和計算,就沒有今天太陽係的概念,也就沒有現在的這種宇宙圖景的概念. 可以說,宇宙間星體大小、距離遠近、運行軌跡都是通過計算算出來的;宇宙的形成、地球的出現、人類的誕生,它的時間節點以及演化過程也是通過計算獲得的;天體運行、地球變化、人類活動,同樣可以通過計算來認識和描繪. 大家都知道阿基米德的浮力定律,知道他是一個偉大的物理學家,其實他還是一個偉大的數學家,他寫的《數沙者》就是一本重要的算術著作.

(三)數學知識是各種知識的基礎. 人類很早就認識到數學知識的重要,古希臘的三位文化巨人蘇格拉底、柏拉圖、亞裏斯多德,他們都是著名的思想家、哲學家,也是著名的科學家、數學家,他們都把數學知識作爲建構自己知識體系的基礎. 我國古代儒家教授學生的六藝,就包括禮、樂、射、御、書、數六個方面的內容,可見數學知識在很早就受到古人的高度重

視. 翻開世界思想史、科學史,我們就會發現歷史上許多重要的思想家、哲學家、科學家都是著名的數學家. 笛卡爾既是著名的哲學家也是著名的數學家. 牛頓是偉大的物理學家,同時也是偉大的數學家,他的代表作是《自然哲學的數學原理》. 甚至一些藝術家,像著名的達芬奇,就對數學有著深入的研究. 可以說,數學知識是各種知識的基礎,要學好其他知識,首先要學好數學知識,現在初、高中階段的三門主要課程是語、外、數,這種設計和規定是很有道理的.

(四)數理邏輯是重要的邏輯思維方式. 邏輯的種類很多,有形式邏輯、自然邏輯、辯證邏輯、樸素邏輯、數理邏輯等. 數理邏輯是近代發展出來的,它是精確化、數位化的形式邏輯. 過去研究問題、分析事物往往定性分析多,定量分析少,分析要深入,就要從定性分析轉向定量分析,而定量分析就是運用數學方法進行推理證明的邏輯分析. 數學推動了數理邏輯的形成,數理邏輯也將推動數學的更大發展. 世界數學大會提出,21 世紀是數學的世紀,理由就在於此. 而且更爲重要的,數理邏輯是聯繫人腦和電腦的媒介. 現在關於人腦、電腦這兩腦的關係,越來越受到人們的關注,數理邏輯爲我們提供了較好的解決方案,既提高人的思維能力又提高電腦的運算能力,把兩者有機的聯繫和統一起來. 因此可以說,數字計算數學是了解世界、認識宇宙、獲得知識的重要途徑和金鑰匙,既是自然科學的前提和基礎,也是人文科學的途徑和方法. 因而,認識數位、精通計算、學好數學是現代社會的基本要求,是現代人的基本素質,可以受用終生、受益無窮.

四、史豐收速算法在當代和未來的作用與意義.

史豐收速演算法發明於上世紀七八十年代,在國內國際引起轟動,也是這個時候,當時主要是對演算法和速度的驚奇,以及它的實用性. 當代作用主要是開發人類智慧,激發大腦潛能,防止因過度依賴電腦引起人的計算等基本能力和大腦思維功能等的退化. 未來的意義主要在於對科學思維、創新思維、創新人才的培養與啓發. 爲什麼這麼說,主要基於這麼三點:

一是,電腦永遠不能也不應代替人腦. 我們現在處在電腦時代、智慧化時代、資訊化時代,這是我們這個時代的主要標誌,電腦給我們帶來了極大的方便,其好處大家都感受得很深,但是帶來的挑戰和問題是什麼呢?我覺得最大最重要的是過分依賴電腦,帶來人腦的懶惰和退化. 現在凡是電腦能代替的,人們都不願意自己去做. 人是有惰性的,對人類來說,思想的惰性、思維的惰性是最可怕的,這意味著人類活力的減弱、能力的退化、創造力的消失,這絕不是危言聳聽. 機器不用是會生銹的,人過分依賴工具是會變笨的,過去的人爲什麼心靈手巧,有那麼多手工藝大師,那麼多精妙絕倫的手工藝產品,原因就是把人自身的作用發揮到極致. 假如都流水線、機器化、標準化了,那就將是另外一種情形. 其實,史豐收速演算法和電腦就有著密切的聯繫,我國著名數學家華羅庚在上世紀八十年代時就曾對史豐收說,你的速演算法應用到電腦上會使電腦的計算速度提高一圈,一圈就是十倍. 且不說這個設想能不能實現,電腦技術發展得越來越快是肯定的,在電腦越來越普及,越來越高智慧化

的過程中,由於過分依賴電腦引起人腦的懶惰和退化將是一直伴隨著我們的一個巨大的挑戰和威脅. 人們爲什麼喜歡用電腦,因爲它方便、簡單、輕鬆,不費腦力,具有人腦不具備或無法達到的功能,而動腦則是一件很麻煩、很有負擔、甚至是很痛苦的事情. 正因爲這樣,造成了人腦對電腦的過分依賴. 但不管怎樣,電腦是人創造出來的,電腦是人腦的產物、人腦的輔助、人腦的工具,從思維特點看,人腦思維是主動性思維、創造性思維,而電腦思維則是被動性思維、程式性思維,所以,這兩個思維是有分工的,是不能相互代替的,但可以發揮各自特點和優勢,相互結合、相得益彰. 因此,在電腦時代,我們要高度關注和切實防止因過度依賴電腦而引起的人腦懶惰和退化,加強人腦智慧開發,實現人腦與電腦的同步昇級,這就需要加強多方面知識的學習,多動腦,勤用腦,善使腦,培養科學思維和創新思維. 史豐收速演算法上世紀九十年代初在香港三聯書店出版時,書名定爲《開發智慧的奇跡》,這或許有市場運作的考慮,但更主要的是獨到的眼光、恰當的定位和超前的理念.

二是,現在的英國可能就是二三十年後的中國. 英國曾經是世界上最早、最發達的資本主義國家,經濟、文化、科技、教育都十分發達,而現在的英國在有些方面已經陷入了這種現代化特別是電腦時代的困惑之中. 英國現在出現什麼情況?有一半的成年人計算能力不及小學低年級學生,大部分中、小學生離開了計算器就無法進行計算,已經嚴重影響了英國人正常的工作、生活和交往,引起了英國官方和社會各界的擔憂和重視. 英國數學計算能力中心統計,因爲英國人計算能力差而造成的經濟損失每年達 200 億英鎊,占到 *GDP* 的 1.3%. 英國政府爲解決這一問題,采取了一些辦法,一是明令禁止小學低年級學生使用計算器;二是大學生畢業後當數學老師每人獎勵7800 英鎊,而且數學學得好的大學生就業機會是一般學生的三到四倍;三是對一部分成年人進行基本計算能力培訓. 2013 年,英國 25 所頂尖中小學的校長,到浙江寧波考察數學教學,當一名學生用傳統的九九乘法口訣表,很快計算出72 除以3 等於24 時,25 名校長震懾了,他們爲中國學生的計算能力而驚歎不已. 2014 年英國教育大臣率領數學考察團到上海學習中國九九乘法表的教學方法,同時簽訂了協議,上海派去 60 個數學老師去英國支教,英國每年向中國派出 60 個數學老師來進修學習. 這就是現在的英國. 這是由什麼原因造成的?電腦時代造成的. 英國是一個紳士國家,很注重知識修養,英國人對自己的閱讀、表達和認識能力不如人就感到很羞愧,他就用時間用精力來加強閱讀,提高自己的能力,而對於計算,他們認爲電腦時代電腦可以代替人腦進行運算,所以學校包括小學教學也沒有必要讓學生反復演練提高運算速度和準確率,這樣就造成了目前這種狀況. 而我們國家已經出現了這種苗頭,隨著電腦的進一步普及,隨著這種趨勢的加強,如果我們對這一問題不提早引起重視,加以引道,二三十年後的中國也可能就是現在的英國.

三是,人腦的思維潛力巨大,取之不盡、用之不竭. 人類進化過程中,最主要的標誌和最重大的飛躍不是人學會了直立行走,也不是懂得了製造和使用生產工具,而是獲得了健全的大腦,擁有了高級的思維. 這是人區別於動物的根本標誌. 世界上最重要的資源,我覺得並不是土地、礦產、空氣、水,而是人的大腦,是人的思維、人的智慧、人的創造. 現在這個時

代,是一個比智慧、比創意的時代,智慧和創意從哪裏來?從大腦中來、從思維中來. 史豐收速演算法被聯合國教科文組織稱爲世界教育科學史上的奇跡,主要是針對開發大腦潛力而言的. 美國富爾頓學院心理係有這麼一段話:我們人類的悲劇,不是恐怖的地震和連年的戰爭,甚至原子彈投向廣島,而是千千萬萬的人活著又死去,卻沒有意識他們身上存在的巨大的潛能. 這個潛能就是科學思維和創造性思維,就是推動人類社會前進的創新型人才. 如果我們每個人都能把自身的潛能發揮出來,創新型社會和創新型國家就會早日建成,民族振興的夢想就會早日實現.

我的數學教學“土”經驗

任　勇

我從事中學數學教學 27 年,研究並總結了一些行之有效的經驗,我稱之爲“土” 經驗. 這些“土” 經驗,不敢說都是原創的,但多有原創思想和獨到思考.

經驗 1:每課一趣. 每節課都要有一道(個) 以上的趣味數學題,或數學遊戲,或趣味數學故事. 有時在課始時講,有時在課末時講,有時滲透在課中講. 趣題可以和所學內容有關,也可以與數學內容無關. 趣題一般不超綱,也可以適度超一點. 趣題宜自然融入,目的在於引發興趣、啓動思維、活躍課堂.

經驗 2:每堂一贊. 不知從何時起,我養成了一個習慣,每天備課快結束前,還要“備一事”,就是“明天表揚誰”. 可以表揚最近進步的學生,可以表揚給出新穎解題方法的學生,可以表揚自覺預習課文的學生,可以表揚研究性學習做得扎實的學生. 教師,不要吝嗇你的贊美. 你的贊美,也許是某個學生成才的起點.

經驗 3:每日一題. 就是每天出一道數學征解題,供學有餘力的學生選做. 征解題可以是教材問題的拔高,可以是身邊的精彩數學問題,可以是切合時宜的數學趣題. 多數學生對每日一題很感興趣,哪天沒給出征解題,學生就“若有所失”. 征解題也可以由學生先提供給我,我簡單評判或修改後署上學生名字公佈.

經驗 4:生考教師. 寒暑假裏,我讓學生出數學試卷考我. 全班學生各個露出神秘的表情,他們從來都是“被考試”,哪有可能出題考老師?寒假裏,我陸續收到來自學生的試卷,並逐一解答,同時在“好題” 旁圈上標記,在有特色的題旁寫上批語. 我將做完的試卷逐一交還或寄回給學生,讓他們批改,看看我能得多少分.

經驗 5:學生命題. 傳統的考試方法,都是教師出卷考學生. 作爲考試改革的一種方法,我在所教的班級中進行讓學生參與編擬數學試題的嘗試,將班級學生分成若干組,每組命一份數學試卷. 我從學生的命卷中選取一部分題目(約占新試卷的 70%),加上我自己的題目(約占新試卷的 30%),組成一份新的數學試卷. 你去試試,一定會收到意想不到的效果.

經驗 6:作業再生. “數學再生作業” 就是教師在批改作業的過程中,發現錯誤並不直接修改,而是通過符號、提示、質疑、重做、“還原”、強化、借鑒、另解、引申、論文等方法,暗示其錯誤或錯誤的性質,或給出探索方向,由學生自己動腦動手,找到正確的答案,總結解題規律和解決新的問題.

經驗 7:學習指道. 在數學教學中,有意識地滲透數學學習方法,是我教學的一大特色.

就學習環節而言,我注重指道學生如何預習、聽課、復習、作業和總結;就學習內容而言,我注重指道學生會學概念、會學命題、會學解題;就數學能力而言,我注重指道學生自我培養運算能力、空間想像能力、邏輯思維能力以及分析問題和解決問題的能力.

經驗 8:貼近生活. 數學家華羅庚曾經說過:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之變,日用之繁,無處不用數學.” 我經常“聯繫生活講數學”,使學生感受到數學的趣味、作用和魅力. 現實生活中處處存在數學,我希望教師能及時地捕捉到它,我更希望學生能及時發現它、研究它,在師生解決數學問題的過程中眞正體會到數學的快樂與魅力.

經驗 9:文化滲透. “數學不僅是數位、符號、公式,而且還有浸潤其中的數學文化. 只有把抽象的、邏輯的、嚴謹的數學,即冰冷的數學,轉化爲生動的、人文的、思考的數學,即火熱的數學文化,數學課堂才是人才陶冶的爐膛.” 張奠宙教授的這番話,我在早年就開始行動了.

經驗 10:不唯教材. 教學中,要有教材,要信教材,但不唯教材,活用教材. 首先要重視教材對教學的指引功能,教材畢竟是由專家學者編的,是集體智慧的結晶;其次要創造性地使用教材,穩定性和通用性的教材必須與時效性和個性化相結合,才能產生新的整體效應;第三,要樹立大教材觀,整合一切教學資源爲“我” 所用.

經驗 11:讓生上課. 讓學生當一回教師未嘗不可,可以是整節課由學生來上,老師適當點評;可以由幾個學生一起上課,老師點評;也可以是學生和老師共同上課,老師講一段,學生講一段. 通常的情況是,講評問題時,若學生有好的解法和好的想法,我就順勢說:“請某某同學上來講一講他的解法(想法).”

經驗 12:成片開發. 數學概念、命題(公理、定理、性質、公式)、解題等,常常是可以“成片開發” 的. 我在教學中,以單元結構教學法爲主,輔以其他教學方法,整體推進. 注重數學知識的縱橫聯繫,揭示其本質屬性,讓學生整體把握數學知識. 在解題教學中,引道學生考慮一題多解,讓問題由點構成線;引道學生一題多變,讓問題由線構成面;引道學生一題多用,讓問題由面構成體. 這樣,學生就可以多層次、廣視角、全方位地認識數學問題.

經驗 13:有意差錯. 我在教學中采用一種“有意差錯” 的方法,即在解題過程中,根據學生容易忽視或弄錯之處,有意將解題過程“不露聲色” 地講錯,最後引出矛盾或說明解答是錯誤的,然後師生共同糾正錯誤. 這樣充分暴露了錯誤過程,讓學生在“情理之中” 驚呼上當,使學生加深對錯誤的認識,在知識上來一次再認識,在能力上得到一次再提高,從而達到預防錯誤、提高解題能力的目的.

經驗 14:高數滲透. 我在教學中,注意加強高等數學的內容、思想、觀點、方法和中學數學的聯繫,取得了較好的效果. 一是介紹高等數學內容,開闊學生知識視野;二是滲透高等數學思想,培養學生思維能力;三是運用高等數學觀點,幫助學生理解教材;四是遷移高等數學方法,提高學生解題能力.

經驗 15:作業談心. 通過數學作業的批改和學生進行“資訊交流”,這種“談心” 起初是單向的,就是我根據學生的學習情況,或表揚肯定,或批評告誡. 後來學生也會在做完作業

後和我談上幾句,使談心成爲“雙向的”. 這種“談心”,可以克服其他談心法的不足,如教師因忙於教學、教研活動,或學生參加活動找不到合適的時間進行談心等.

經驗 16:統計到位. 每次單元小測或考試,對學生的錯題進行統計,設計一個表格,横向爲各題題序,縱向爲學生姓名. 填完表後,横向一看,每個學生的丟分情況一目了然;縱向一看,每種題型的丟分情況一清二楚!有了這些統計資料,講評起來就更有針對性.

經驗 17:不為原序. 就是講評作業、練習、試卷時,不是按原序進行,而是根據統計情況重新排序進行講評. 對於極少數學生做錯的題,就不講評了;對於絕大多數學生做錯的題,爲了增強印象,可以最先講評;有些題要畫圖形,爲了節約課堂寶貴的時間,老師課前先在黑板上畫個圖,這樣這道題就可以先講;也可以將同類問題(如最值問題)一起講.

經驗 18:可開“天窗”. 數學相對差一些的學生,我常常鼓勵他們認眞做好基礎題,因爲基礎題一般都在他們“能拿下”的範圍內,允許在每次作業或練習中在中檔題或壓軸題之處“開天窗”. “開天窗”的前提,一是經過認眞思考確實還不會做,二是盡量做好基礎題.

經驗 19:限制解法. 求異思維是一種重要的創造性思維. 解題教學是促進學生進行創造性思維活動的主要途徑,我在教學中注意選用某些限制解題方法的題目,用以訓練學生的求異思維,適度培養學生的解題速度,著力開發學生的創造能力,取得了一定的成效.

經驗 20:限時作業. 提高解題速度,是數學作業的一項基本功,一些學生考試時感到時間不夠用,這與解題速度慢有關. 因此,我要求學生要有效率感,提高單位時間的作業量,你若平時做數學作業一般需要 45 分鐘,你能不能給自己一個指令:今天做作業,節約 1 分鐘. 你去做了,結果發現節約的可能不止 1 分鐘,也許是幾分鐘. 經常進行限時作業訓練,必有好處.

經驗 21:序化有序. 序化,就是要求學生建立知識大廈,讓數學知識在學生的頭腦中“有序”. 比如,學生學了等差數列和等比數列,就可以整理出與它們有關的八個內容:定義、圖像、通項、中項、前 n 項和、性質、判定、應用,將這八個內容搆成一個知識體系,“有序”地印記在自己的大腦裏.

經驗 22:類化問題. 類化,就是引道學生將問題歸類,掌握這一類問題的解題策略和具體方法,陌生的問題一旦轉化入“類”,問題就會迎刃而解. 類化,也可以理解爲把一些數學問題歸爲一類“小問題”,再把若干個數學“小問題”歸爲一類“中問題”,再把若干個數學“中問題”歸爲一類“大問題”.

經驗 23:活化思維. 活化,就是融合多方面的知識,運用多種數學概念、定理、公式及多種運算靈活地解決問題. 活化,就解題而言,就是思維的靈活性. 指道學生善於觀察,是發現解題思路的基本途徑;指道學生恰當地轉化,往往使問題得以解決. 在解題中,還應培養學生隨機應變的能力,既注意通法,又適當探求特法,“通法使人深刻,特法使人靈活”.

經驗 24:深化提昇. 深化,就是將數學問題加以引申. 常用的辦法有一般化、類比、豐富命題結論、變換命題條件、交換命題條件與結論等. 深化,是一種探索問題的方法,也是一種值得提倡的學習方法;深化,可以激發學生的學習興趣,有效地提高數學水準.

經驗 25:初中引趣. 學生學習數學的積極性,是學好數學的重要前提,要注意從學習數學中引起學生學習數學的興趣. 初中生,他們自覺性、自製力較差,注意力易分散,而好奇心、好勝心較強,如果教師能根據他們的心理規律,逐步引道他們熱愛數學,從而發展他們的智力,教學品質就必然會提高.

經驗 26:高中引深. 數學解題教學應突出探索活動,探索活動不能僅停留在對原習題的解法的探索上,而應適當地、有機地對原習題進行深層次的探索、挖掘出更深刻的結論. 引深,是一種探索問題的方法,也是一種值得提倡的學習方法. 引深,可以激發學生學習數學的興趣,可以有效地提高學生的數學水準.

經驗 27:善用媒體. 多媒體網路教學給教育帶來了全新而深刻的革命,多媒體網路教學將有著迷人的廣闊前景. 爲了使多媒體網路教學"一路走好",爲了使多媒體更好地運用於數學教學,我以爲多媒體網路教學不能忽略情感、不能沒有變化、不能拿來就用、不能思維僵化、不能破壞想像、不能費師多時、不能取代實驗、不能遠離實踐、不能忽視文本、不能主體不明.

經驗 28:科際聯繫. 中學學科教學,少有"跳出學科看學科" 的眼界,少有"學科縱橫聯繫" 的理論研究和實踐探索,知識是一個整體,"科際" 之間應有機聯繫. 因此,在數學教學中如能結合有關內容,巧妙地聯繫各學科知識,將數學知識與其他學科知識進行"科際聯繫",就能激發學生的學習興趣,活躍課堂氣氛,提高學生的解題能力(尤其是解決實際問題的能力).

經驗 29:與美共舞. 數學中充滿著美的因素,運用審美法則在一定程度上可以幫助我們提高解題和研究數學問題的能力. 數學美感,能喚起良好的情感,就會感到數學學習是十分有趣的. 不覺得是一種負擔、一種苦役,而是一種需要、一種享受. 數學中充滿著"美",數學家維納說過:"數學實質上是藝術的一種."

經驗 30:借題發揮. 數學教育家波利亞認爲:"一個有責任心的教師與其窮於應付繁瑣的數學內容和過量的題目,還不如適當選擇某些有意義但又不太復雜的題目去幫助學生發掘題目的各個方面,在指道學生解題過程中,提高他們的才智與推理能力." 據此理,我經常借題發揮,探索一題多解、一題多變、一題多用的價值,以期培養學生學會從多層次、廣視角、全方位地認識、研究問題,培養學生的創新意識和創新能力.

(任勇係廈門市教育局副局長,數學特級教師,獲蘇步青"數學教學獎" 一等獎)

從“數學歸納法”與“數學演繹法”之爭談開來

澳門數學教育研究學會　鄭志民

高中學生在學習了**“數學歸納法”**後,基本上能夠按照老師的教道,正確地對“用數學歸納法證明相關的數學問題(包括等式,不等式,整除性等數學命題)”作出解答. 但是什麼是**“數學歸納法”**?它的眞正含義是什麼?它是**“歸納法”**還是**“演繹法”**卻完全不清楚. 甚至於有個別老師也沒法正確而清晰地回答這一問題.

本文從**“數學歸納法”**與**“數學演繹法”**的爭論入手,對**“歸納法”**(包括**“完全歸納法”**和**“不完全歸納法”**)、**“演繹法”**和**“數學歸納法”**作較詳細地分析和論述,以便看清**“數學歸納法”**之盧山眞面目.

(一)“數學歸納法”與“數學演繹法”之爭由來已久

60 年代末至 70 年代中期,中國數學教育界掀起了一次**“數學歸納法”**和**“數學演繹法”**的大論戰.

堅持**“數學歸納法”**的學者認爲,**“數學歸納法”**是一種**“歸納法”**,此種方法的應用有着悠久的歷史,它一直被沿用至今(中國的中學數學課本和數學教學法書籍仍然堅持講“數學歸納法”是歸納法;但是早在五十年代蘇聯的教學法書籍中,已經明確指出**數學歸納法是演繹法的特殊形式**,眞是令人深感遺憾!),並認爲大數學家華羅庚先生也稱之爲**“數學歸納法”**,並針對這種方法的應用時,強調**“數學奠基”**(即 $n=1$ 時命題成立),和**“歸納遞推”**(即從“$n=k$ 時,命題成立”,推出“$n=k+1$ 時,命題也成立”),兩條缺一不可(即**“1 對,假設對,那麼 $n+1$ 也對”**)!

而主張**“數學演繹法”**的學者,則認爲實施**“數學歸納法”**的整個過程完全是**演繹推理**的過程,根本不是**“歸納”**. 整個過程完全沒有**“猜想”**和**“歸納”**(通過觀察,猜想,最後得出某個結論)的成份. **“數學歸納法”**實際是**“歸納 — 演繹法”**,屬於**“演繹法”**而不是**“歸納法”**.

“數學歸納法”是**“完全歸納法”**的一種特殊狀態.

“數學歸納法”包括了兩個命題:

第一個命題:“當 $n=1$(或 $n=2,3$ 等)時,命題成立”;

第二個命題:“假設 $n=k$ 時,命題成立,證明當 $n=k+1$ 時,命題也成立”.

“數學歸納法”是高考、數學競賽、學習高等數學乃至於研究現代數學的一種嚴格的推理論證方法,實際上是一種貨眞價實的**“演繹法”**.

(二)“演繹法”、“歸納法”和“數學歸納法”的再認識

人們在認識事物時,通常都要在已知事實的基礎上進行推理,得出新的結論. 推理的方法很多,其中**演繹推理**(簡稱**演繹法**)與**歸納推理**(簡稱**歸納法**)是兩種基本的方法,無論在日常生活還是在數學中都得到了廣泛應用. 例如,我們由

每一個三角形的內角和都等於　　(1)

$\triangle ABC$ 是一個三角形,　　(2)

得出 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$　　(3)

這便進行了推理,這裏(1)是一個已知的一般性命題,(2)說明具體的 $\triangle ABC$ 在{三角形}這個集合中,於是得到結論.(3)整個推理過程是從總體到個別,從一般到特殊,這樣的推理稱爲**演繹法**.(1)稱爲大前提(前提即條件的意思),(2)稱爲小前提,(3)是結論. 由大前提、小前提推出結論,這種形式的**演繹法**稱爲**三段論演繹法**. 一個數學定理的證明通常就是由若干個三段論演繹法搆成的(平面幾何中的定理和代數中的許多定理的證明都是如此). 可以說,沒有**演繹法**就沒有數學證明.

演繹法雖然重要,但它並不是萬能的. 特別是當我們去研究一個不熟悉的新問題時,象上面(1)中那樣的一般規律我們還知之甚少,這時,我們的推理的方向往往恰好顛倒過來——從特殊到一般,這樣的推理稱爲**歸納法**.

例如,**(甲)** 當我們比較 n^2 與 4^n 的大小時,經初步計算可得下表:

n	1	2	3	4	5	6	…
n^2	1	4	9	16	25	36	…
4^n	4	16	64	256	1024	4096	…

(4)

由表(4)我們可能猜想,對所有的自然數 n 都有

$$n^2 < 4^n. \qquad (5)$$

表(4)說明對 $n = 1、2、3、4、5、6$ 這幾個特殊値,(5)式都成立. 我們由表(4)推斷(實際是猜想)(5)式對所有自然數成立,這就是從特殊到一般的推理,采用的便是**歸納法**.

象這種只驗證了部分特殊情況而推測一般情況也成立的歸納法又稱爲**不完全歸納法**. 很明顯,不完全歸納法只能提供一種猜測. 這時,可能猜對,也可能猜錯. 所以,它不是一種證明方法,在這一點上它與演繹法有著根本區別.

“不完全歸納法” 在從“試一試”開始,通過**“試驗(觀察)、歸納、猜想”**揭示規律,找到結論.

“不完全歸納法” 是通過對某類事物中的部分對象的研究,概括出關於該事物的一般性結論的推理方法. 這種先“試一試”,再逐步加以歸納,最後猜想出一般的規律的方法,雖然不是嚴密的邏輯論證的方法,但是,它對於發現新的命題、概括新的性質,又是不可缺少的.

“不完全歸納法” 雖然可能道致錯誤的猜想,但它也可能道致正確的猜想,它能使我們發現新的規律. 研究一個新問題時,我們首先需要猜到結論,然後再設法去證明(或否定)該結論. 如對於不等式 $n^2 < 4^n$,只有當我們已經猜到它之後,才會設法去證明它. 所以,**“不完全歸納法”** 作爲一種猜想的方法,在數學研究、數學發現中起著重要作用.

應用**“不完全歸納法”** 的一般步驟是:先找幾個特殊對象進行試驗(觀察)然後歸納出共性特徵,最後提出一種比較合理的猜想,即**“試驗 —— 歸納 —— 猜想”**. 至於要考察多少個特殊對象,那就要看具體情況. 一般說來,總要使我們能比較有把握地猜想出一般規律爲止. 當然,用**“不完全歸納法”** 提出的結論,僅僅是一種預測性的設想,它的正確與錯誤,還要經過嚴格證明或舉反例來加以否定. 這一點也是不可忽視的.

“不完全歸納法” 對發現新的命題、概括新的性質有重要作用,我們應該逐步掌握它. 這不僅是學好數學基礎知識的需要,也是培養我們獨立思考、觀察與分析、發展與創新能力的需要.

相反的,在進行歸納時,如果我們考慮了全部特殊情況,那麼我們就可以斷言結論確實成立. 這樣的歸納法稱爲**“完全歸納法”**. **“完全歸納法”** 是一種證明方法.

例如,(乙) 當我們在證明**“一條弧所對的圓周角等於它所對的圓心角的一半”** 這一定理時,我們分三種特殊情況考慮:

ⅰ)圓心在圓周角的邊上,

ⅱ)圓心在圓周角的內部,

ⅲ)圓心在圓周角的外部.

對於情況 ⅰ)、ⅱ*i*)、ⅲ),我們分別證明了上述結論成立,由於同一圓中,圓心與圓周角的位置只有上述這三種情況,所以上述結論普遍成立

一般地,如果在一個問題中僅有有限種特殊情況,那麼從原則上講,我們總可以如上面的例子一樣,逐一去考查各種情況,作出完全的歸納,從而證明結論. 但是要證明 $n^2 < 4^n$ 對所有的自然數 n 都成立卻不能這樣做,因爲自然數集是無限集,簡單地令 $n = 7,8,9\cdots$,這樣驗證下去是沒有完結的. 對於象 $n^2 < 4^n$ 這種與自然數有關的命題,我們一般可以采用**“數學歸納法”** 來處理. **數學歸納法**是一種**不完全歸納法**,利用它,我們可以證明一個命題對所有的自然數成立.

應用**“完全歸納法”** 時,要注意對考察的對象進行**合理的分類**,使其**既不遺漏,又不重復,遺漏了則結論就沒有普遍性,重復了則勞而無功**. **完全歸納法**是一種嚴格的證明方法,當對象數目有限,而且不是很大時,我們常可采用這種方法.

學習和掌握**“完全歸納法”**,對培養我們全面地考慮問題的能力,養成周到嚴密的習慣,是大有好處的.

但是,這種方法也有局限性. 其一,當所列舉的情況比較復雜,不易判別可能情況的具體屬性時,用起來就比較困難;其二,如果列舉的情況太多,證明或求解起來,必然繁瑣;其三,當列舉的情況爲無限多時,就無能爲力了. 這必然爲**“數學歸納法”** 所代替.

數學歸納法包括下面兩個步驟:

A. 證明當 $n=1$ 時,命題成立.

B. 假設 $n=k$ 時命題成立,證明當 $n=k+1$ 時命題也成立.

完成這兩個步驟後,我們就可以斷言該命題對所有的自然數都成立.

爲什麼完成了 A、B 兩步後便能斷言命題對所有的自然數都成立呢?這是因爲.

ⅰ) 由 A 知,$n=1$ 時命題成立;

ⅱ) 在 B 中,令 $k=1$,由 ⅰ) 與 B 知 $n=k+1=1+1=2$ 時命題成立;

ⅲ) 在 B 中,令 $k=2$,由 ⅱ) 與 B 知 $n=k+1=2+1=3$ 時命題成立;

……

如此無限地推證下去,可知 $n=1,2,3,4,\cdots$,即 n 爲任意自然數時命題成立. 在上面無限步推理中,我們無限次地應用了步驟 B. 這裏,k 的任意性起了關鍵作用. 即是說,k 是一個變量. 上面,k 依次取了 $1,2,3,\cdots$ 無窮多個值.

對於步驟 B 我們也可以敍述爲**"假設命題對任給的一個自然數 k 成立,那麼對後面一個自然數 $k+1$ 命題也成立",所以可以説步驟 B 體現了一種"遺傳性"**. 因爲 $n=1$ 時命題成立,經過"遺傳",逐次得出 $n=2,3,\cdots$,以致對任何一個自然數命題都成立.

不難看出,上面我們**由 ⅰ) 與 B 推出 ⅱ) 時,B 是大前提,ⅰ) 是小前提,ⅱ) 是結論;在由 ⅱ) 與 B 推出 ⅲ) 時,B 是大前提,ⅱ) 是小前提,ⅲ) 是結論;……. 所以"數學歸納法"實質上是由無窮多步的三段論"演繹法" 構成的**. 由於我們在記號上引入了變量 k,因此能夠用 A、B 兩個步驟把這個無限的過程簡明地表達出來.

下面我們用**"數學歸納法"** 來證明上述的不等式(5):$n^2<4^n$.

A. $n=1$ 時,(5) 式變爲 $1<4$,成立.

B. 設 $n=k$ 時,(5) 式成立,即

$$k^2<4^k \qquad (6)$$

現在,我們要證明 $n=k+1$ 時(5) 式也成立,即證明

$$(k+1)^2<4^{k+1} \qquad (7)$$

成立. 比較已知的(6) 式與求證的(7) 式知,可將(6) 式變形爲 $4^{k+1}>4k^2$,要證(7) 式只需證明

$$4k^2>(k+1)^2, \qquad (8)$$

由 $4k^2-(k+1)^2=3k^2-2k-1=(3k+1)(k-1)>0 \quad (k>1)$ 知(7) 式成立($k=1$ 時直接驗證). 於是,根據**數學歸納法**知,對所有的自然數 n 有 $n^2<4^n$.

上面我們初步弄清了**"數學歸納法"** 的原理及其用法,下面我們再指出幾個應該注意之點:

① 上面的步驟 A 通常驗證時十分簡單,但是卻絕對不可缺少. 因爲步驟 A 是我們推理的出發點(通常稱之爲**歸納奠基**). 如果我們不知道 $n=1$ 時命題成立,也就不能逐步推出 $n=2$,$n=3$,$\cdots$ 時命題成立. 例如,我們考慮下述的命題.

又如(丙),命題:“$n > n + 1$”.

這顯然是個荒謬的命題,但它卻滿足步驟 B 的要求:假設 $n = k$ 時命題成立,即 $k > k + 1$,兩邊加上 1 得 $k + 1 > (k + 1) + 1$,於是 $n = k + 1$ 時命題也成立.

這個例子說明,如果僅僅有步驟 B 而沒有步驟 A 作爲推理的基礎,那麼我們就可能是從一個荒謬的假設($1 > 2$)開始,推出一個荒謬的結論($2 > 3$),再以這個荒謬的結論爲基礎,又推出另一個荒謬的結論($3 > 4$),…. 最後我們得出一連串不正確的結論. 所以步驟 A 是不可缺少的.

再如(丁),如果我們不考慮 的情況,可以證明

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n + 1)\right]^2 + \ell$$

這裏,ℓ 是任何的數.

事實上,假設第 k 號命題

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{1}{2}k(k + 1)\right]^2 + \ell$$

正確,那末第 $k + 1$ 號命題

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = \left[\frac{1}{2}k(k + 1)(k + 2)\right]^2 + \ell$$

也就正確(注意 ℓ 是任何數).

但是,**這個結論顯然是荒謬的**.

講到這裏,讓我們再重復說一遍:**數學歸納法的證明過程必須包括兩個步驟:“當 $n = 1$ 的時候,這個命題是正確的”;“假設當 $n = k$ 的時候,這個命題是正確的,那末當 $n = k + 1$ 的時候,這個命題也是正確的”. 兩者缺一不可!缺一不可!**

也許有人會問:上面的第一句話要不要改做“當 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的時候,這個命題是正確的”?

這樣的要求是多餘的,同時也是不正確的,所以多餘,在於除了用 $n = 1$ 的來驗證以外,還要用 $n = 2$ 和 $n = 3$ 來驗證,而它的不正確則在於“…”. 如果“…”表示試下去都正確,那末試問到底要試到什麼地步才算試完呢?

“多餘” 還可以解釋成我是從 $n = 1, n = 2, n = 3$ 裏看出規律來的,或者希望通過練習熟悉這個公式;但在沒有證明 n 是所有自然數時都對以前就加上“…”,卻要不得,這是犯了邏輯上的錯誤!

② 步驟 A 雖然不可缺少,但是我們不一定從 $n = 1$ 開始. 根據問題的需要,我們可以從任何一個適當的自然數 n_0 開始. 這時,**數學歸納法**的步驟變爲、

A. 證明 $n = n_0 (n_0 \in N)$ 時,命題成立

B. 假設 $n = k (k \geq n_0)$ 時命題成立,證明 $n = k + 1$ 時命題也成立.

那麼,對於大於或等於 n_0 的所有自然數 n 命題成立.

總之,我們是在集合 $E = \{n \mid n \in n, n \geq n_0\}$ 上考慮問題的.

③ 步驟 B 也是不可缺少的. 實際上,如果只有步驟 A,那就不是**數學歸納法**而是**不完全歸納法**,正如前面所說,不能由此斷定結論成立.

④ **“數學歸納法”** 雖然是證明與自然數集 N 有關的命題的一個有力工具,但是,並非每一個與自然數集有關的命題都能用 **“數學歸納法”** 簡單地加以證明. 例如,對著名的**哥德巴赫(*Goldbach*) 猜想“每一個大於 4 的偶數 $2n$ 都可以表示為二奇素數之和”**,有人已經用計算機驗證,當 $2n \leq 9 \times 10^8$ 時,結論均成立. 但是,這個問題至今尚未解決.

(三)“數學歸納法”之三步曲

從分析一些特例的共同特徵,進而得出一般性結論,這種由特殊到一般的推理方法稱爲**“歸納法”**.

“歸納法” 包括前面所述的**“完全歸納法”** 和**“不完全歸納法”**.

“完全歸納法” 適用於研究對象的個數是有限的,或對象分類有限,并且不很大的情況.

“不完全歸納法” 不僅可適用於研究對象無限多個,也適用於研究對象的數目有限(數目較大) 的情況.

由於用**“不完全歸納法”** 作出的猜想不一定正確,因此要經過嚴格論證加以肯定,或舉反例加以否定. 與自然數 n 有關的命題,常用兩個步驟(實即兩個命題) 來證明它們的正確性.

(1) 雖當 n 取第一個 n_0($n_0 = 1$,或 $n_0 = 2$ 等) 時,命題成立.

(2) 假設當 $n = k(k \geq n_0, k \in N)$ 時命題成立,應用假設證明 $n = k + 1$ 時,命題也成立.

這種證明方法稱爲**“數學歸納法”,它屬於推理論证的演繹法而非歸納法.**

“歸納法” 是一種發現結論的方法,用以發現規律,作出猜想的方法. “數學歸納法” 是對猜想的正確性加以肯定的一種嚴格論证方法. 二者概念不同,但卻是相互聯繫的.

運用**“數學歸納法”** 論證命題時,兩個步驟缺一不可. 第一個步驟稱爲“歸納奠基”,是證明的基礎;而第二個步驟稱爲**“歸納遞推”**,它反映了無限遞推關係. 第二個步驟中假設 $n = k$ 時命題成立稱爲**“歸納假設”**. **“歸納遞推”** 的基本搆思,也是中心任務在於**“一湊假設,二湊結論”,設法接納、使用“歸納假設” 於“遞推論证” 中,從而推证出“歸納目標”(即 $n = k + 1$ 時的證明目標),進而證明命題(從中清晰地理解了由 $n = k$ 到 $n = k + 1$ 時命題形式之間的關係).**

由“歸納莫基”(第一步),到**“歸納遞推”**(第二步),進而得**“歸納結論”**(第三步) 合稱爲**“數學歸納法”** 的**“三步曲”**.

〔**例** 1〕通過下列各式計算,你可以得到什麼結論?

$1 = ?$

$1 + 2 + 1 = ?$

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = ?$

(1) 計算:

$1 = 1^2$,

$1+2+1=4=2^2$,

$1+2+3+2+1=9=3^2$,

(2) **再觀察:**

通過對各算式及結果的觀察,發現**"後一個算式的各加數的個數比前一個算式的各加數的個數多 2,各算式的結果都是該算式序號的平方"**.

(3) **聯想:**

通過對三個算式的觀察,模擬分析,可得更多的算式:

$1+2+3+4+3+2+1=4^2$,

$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$,

$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6^2$,

(4) **猜想:**

在歸納的基礎上,可作出一般的猜想:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$$

(5) **驗证:**

對猜想作初步的驗證:

左邊 $=n+1(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1+1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$

$=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{(n-1)\text{個}}+1$

$=(n-1)(n+1)+1$

$=n^2=$ 右邊.

(6) **嚴格論证:**

用**"數學歸納法"**證明猜想的正確性.

證明:① 當 $n=1$ 時,左邊 $=1$,右邊 $1^2=1$,左邊 $=$ 右邊,等式成立.

② 假設 $n=k$ 時,等式成立,即

$$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1=k^2,$$

則當 $n=k+1$,有

$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1$

$=[1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1]+k+(k+1)$

$=k^2+k+(k+1)$

$=(k+1)^2$.

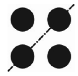
因此,$n=k+1$ 時,等式也成立.

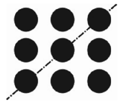
根據數學歸納法原理,由 ① 和 ② 可知,對於任何正整數 n, 等式成立.

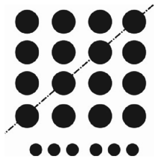
(7) **數形結合,深化理解:**

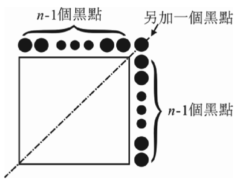
用黑點"●"表示數 1,若"●●"表示數 2,則 $1+2+1$ 用 4 個黑點"●"表示,把表示數的黑點按各和式作出**"黑點正方形"**,順序排列如下:

(1)  表示$1=1^2$,

(2)  表示$1+2+1=2^2$,

(3)  表示$1+2+3+2+1=3^2$,

(4)  表示$1+2+3+4+3+2+1=4^2$,

(5) 

表示
$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$.

其中(1)表示搆成“邊長”爲1的“正方形”的黑點個數爲1^2;(2)表示搆成“邊長”爲2的“正方形”的黑點個數爲2^2;(3)表示搆成“邊長”爲3的“正方形”的黑點個數爲3^2;(4)表示搆成“邊長”爲4的“正方形”的黑點個數爲4^2;…(n)表示搆成“邊長”爲n的“正方形”的黑點個數爲n^2.

(1)至(n)中的“正方形”中,後一個比前一個的“邊長”多出一個黑點.

從上例可以看出用**“數學歸納法”**解題,是依照**“三部曲”**來行事.

首先,考慮當n等於1時,從等式左邊計算出來的結果,是否等於右邊.如果相等,那麼就稱該等式在$n=1$的情況之下成立.這就是**“歸納奠基”**.

其次就是所謂的**“歸納遞推”**.先假設漢n等於某一整數k時,等式成立;然後證明從上面的假設可以推算出,當n等於$k+1$時,該等式仍然成立.

第三步就是寫一段**“聲明”**:由於算式滿足以上的兩個驗算,根據所謂的**“數學歸納法原理”**,命題就會對一切的整數n成立.

從以上的討論可見,教科書中的**“數學歸納法”**的確是一個**非常嚴謹的推理證明**.我們所進行的每一步計算都要有根有據,**完全沒有觀察和猜想的成分**.因此,提出將**“數學歸納法”**更名爲**“數學演繹法”**的人,確實有他們的理由.

應用**“數學歸納法”**證明命題時,運用了**“三步曲”**.其中的第一步曲——**“歸納奠基”**是**“數學歸納法”**的重要基礎(**“奠基石”**).沒有它,則論證將產生錯誤!

誤區一:忽視了“歸納奠基”的必要性.

〔**錯例1**〕試證:$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}+1\quad(n\in N)$.

〔**錯证**〕假設$n=k$時,等式成立,即

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}+1,$$

則當 $n=k+1$ 時,有

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+1+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}+1,$$

即 $n=k+1$ 時,等式成立.

根據數學歸納法原理可知,當 n 爲任意正整數時,等式成立.

這個“證明”是錯誤的,因爲它沒有“基礎”,忽視了**“歸納基礎”**的必要性.

上述的錯證竟把錯誤的結論“證明”出來了,豈非怪事?出現此種怪現象的原因就是缺少了**“歸納奠基”**這一步!

切莫以爲**“歸納奠基”**這一步就是“當 $n=1$ 時,命題成立”這麼一句話,似乎無關緊要,可有可無. 從上例可以看出,不去認眞驗證這一步,或者根本沒有這一步就可能陷入錯誤的泥坑.

事實上,當 $n=1$ 時,左邊 $=1\neq\frac{1\times(1+1)}{2}+1=$ 右邊,故錯例〔1〕的題目是錯誤的. 因此,只有**“歸納遞推”**沒有**“歸納奠基”**的論證是錯誤的論證,**“歸納奠基”**的步驟決不可少. 形象地說,只有**“歸納遞推”**沒有**“歸納奠基”**只能是一座沒有基礎的空中樓閣.

“數學歸納法”的第二步曲稱爲**“歸納遞推”**,它是使命題的結論的正確性從 n 走向 $n+1$ 的關鍵.

誤區二:忽視了“歸納遞推”的必要性.

〔**錯例** 2〕試證:當 n 爲任意正整數時 n^2+n+41 都是質數.

〔**錯证**〕經過計算(可讓學生用計算器計算),當 $n=1,2,3,\cdots,10$ 時,式子 n^2+n+41 的結果都是質數,列表如下:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
n^2+n+41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151	$\cdots$

因此,當 n 爲任意自然數時,n^2+n+41 都是質數!

〔**評注**〕把 n^2+n+41 寫成 $n^2+(n+40)+1$,聯想公式 $(n+1)^2=n^2+2n+1$,則可以知道,當 $n=40$ 時,有 $n^2+n+41=n^2+(n+40)+1=40^2+2\times40+1=41^2$,可見,當 $n=40$ 時,n^2+n+41 不是質數;又當 $n=41$ 時,顯然,$n^2+n+41=41\times43$,也不是質數.

因此,〔錯例〕2 的題目是錯誤的.

即使我們驗證了 n 的100個不同的值,命題都成立,爲甚麼對於任意的 n 值,命題卻不成立呢?

其實,道理很簡單,由若干個具體特例歸納或猜想出某一個一般性結論,這個一般性結論是否成立,仍是有待證明的問題.

事實上,**“錯证”**沒有完成**“歸納遞推”**,即“由 $n=k$ 時命題成立,推道出 $n=k+1$ 時命題成立”.

難道我們見到過成千上萬的人都是黃皮膚、黑眼睛、黑頭髮,就可以肯定世界上所有的人都是黃皮膚、黑眼睛、黑頭髮嗎?

誤區三:采用“形式偽证”.

形式僞證是初學者常犯的錯誤,在證明過程中,雖然形式地套用了數學歸納法的步驟,而實際上命題沒有被證明.

〔**錯例** 3〕證明:$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in N_+)$.

〔**錯证**〕(1) 當 $n=1$ 時,左邊 $=1$,右邊 $=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$,左邊 $=$ 右邊. 即 $n=1$ 時,等式成立.

(2) 假設 $n=k$ 時,等式成立,即

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

則當 $n=k+1$ 時,有

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

即 $n=k+1$ 時,等式成立.

根據數學歸納法原理,由(1) 和(2) 可知,等式對於 $n\in N_+$ 都成立.

證畢後,讓學生研究上述**“錯证”** 錯在何處,再作評注.

〔**評注**〕上述**證明“$n=k+1$ 時,命題成立”**,並未利用**“歸納假設”**,只是在證明過程中套用了**“數學歸納法” 的步驟** —— 只是把要證明的等式對於 $n=k+1$ 時加於批注而已,並非證明,這種證明是無效的僞證,根本沒有完成**“歸納遞推”**,因此上述證明是錯誤的,但命題本身卻是成立的.

通過上述三個錯例,我們知道使用**“數學歸納法”** 時,必須注意**“歸納奠基”** 和**“歸納遞推”** 兩大步驟缺一不可,而且要很好匹配,否則會陷入誤區,致使**“正例錯证”** 或**“錯例正证”**.

一般來說,**“歸納奠基”** 步驟只是簡單的驗證,容易完成,因而,實施**“歸納遞推”** 就成了關鍵的一步,**“歸納遞推”** 的任務是**“由 $n=k$ 時命題成立,推出 $n=k+1$ 時命題成立.”**

“歸納遞推” 的基本搆思是“通過 $n=k$ 時的命題” 與“$n=k+1$ 的命題” 的對比,找出在 $n=k+1$ 命題的推證過程中,使用 $n=k$ 時的命題(即**“歸納假設”**) 的途徑.

簡單地說,**“歸納遞推”** 的基本搆思在於設法使用**“歸納假設”**.

通俗地講**“歸納遞推”**(也即數學歸納法的步驟(2)) 中的中心任務是兩個“湊”,**一“湊假設”,二“湊結論”,**關鍵是明確 $n=k+1$ 時的證明目標,理解由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 時命題形式之間的區別和聯繫.

“數學歸納法” 是用**兩個命題**的證明,代替了**無窮多個命題**的證明,體現了有窮與無窮的辯證關係.

能否實施**“歸納遞推”**關鍵是作好**“遞推搆思”**. 做好**“遞推搆思”**的關鍵是從變形入手,對**“歸納假設”**作變形,而推出**“歸納結論”**的形式.

“遞推搆思”有很多方法,其中包括**“兩邊同加變形法”,“兩邊同乘變形法”,“重組變形法”**都是重要的**“遞推搆思”**的方法,此外,又如**“求差變形法”,“等價命題法”,“歸納假設轉化法”**也都是重要而切實可行的“遞推搆思”方法(可參閱作者編著之數學教育閑思集**《學海浪花》**$P251-P266$).

我們將會看到,**“遞推搆思”**的方法甚多,精巧獨特之處常常使人嘆服,然而,種種精彩獨特的**“歸納遞推”**都出於同一基本搆思 —— **設法接納和使用“歸納假設”**.

“數學歸納法”鋒芒所到之處銳不可當,但畢竟**“數學歸納法”**常限於證明與自然數有關的命題,且並非所有與自然數有關的命題都能用**“數學歸納法”**證明,更不是凡與自然數有關的命題都一定要用**“數學歸納法”**才能證明.

並非**“非數學歸納法莫屬”**. 下述的例子便是這方面的例證.

〔**例** 2〕試證:n 爲任意正整數時.

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{1\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

〔**证法一**〕(1) 當 $n=1$ 時,左邊 $=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$,右邊 $=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$,左邊 $=$ 右邊,等式成立.

(2) 假設 $n=k$ 時,等式成立,即

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{1\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1},$$

那麼,當 $n=k+1$ 時,有

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{1\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$$=\frac{k+1}{2(k+1)+1}.$$

這就是說,當 $n=k+1$ 時,等式也成立

根據**“數學歸納法”**原理,由(1)和(2)可知,對於任何自然數 n,等式成立.

〔**证法二**〕易知

$$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),$$

$$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),$$

……

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

將以上 n 個等式相加,得

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{1\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$ 得證.

〔**評注**〕這種證法稱爲**“分項相消法”**(**“析項法”**),它將等式左邊的每一項析成兩項的差,并且前一個差中的減項好等於後一差中的被減項.

這些差相加時,由於成對的項都能相消,因此由**“無限”項**的和變成**有限項**的和(兩項差),結果便容易得出了.

〔**证法三**〕設 $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$,其中 n 爲非負整數,特别地 $S_0=\dfrac{0}{2\times0+1}=0$.

由於 $S_n-S_{n-1}=\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n-1}{2(n-1)+1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$(通項),

$$\begin{aligned}因此\frac{1}{1\times3}&+\frac{1}{1\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=(S_1-S_0)+(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+\cdots+(S_n-S_{n-1})\\&=S_n-S_0\\&=\frac{n}{2n+1}.\end{aligned}$$

證畢.

此證法是由分析和式的通項 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 入手,並構造出和式 $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$,進而推出用 S_n 和 S_{n-1} 表達通項 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,從而證明了本題.

與 n 有關的數學命題(即有無限個研究對象的命題)的證明屬於**“不完全歸納法”**的證明,但不一定都要用**“數學歸納法”**證明. 下述的三個例子可以作出充分的說明.

〔**例 3**〕計算 $\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{n個}\underbrace{88\cdots8}_{n個}9}$.

〔**解**〕當 $n=1$ 時,$\sqrt{49}=7$,

當 $n=2$ 時,$\sqrt{4489}=67$,

當 $n=3$ 時,$\sqrt{444889}=667$,

……

進而猜想,本題的結論可能是 $\underbrace{666\cdots6}_{n個}7$

事實上，$\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{n個}\underbrace{88\cdots89}_{n個}} = \sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{n個}\times10^n+2\times\underbrace{44\cdots4}_{n個}+1}$

$$= \sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{n個}\times(\underbrace{99\cdots9}_{n個}+1)+2\times\underbrace{44\cdots4}_{n個}+1}$$

$$= \sqrt{4\times9\times(\underbrace{11\cdots1}_{n個})^2+3\times\underbrace{44\cdots4}_{n個}+1}$$

$$= \sqrt{[6\times(\underbrace{11\cdots1}_{n個})]^2+2\times6\times(\underbrace{11\cdots1}_{n個})\times1+1^2}$$

$$= \sqrt{[6\times(\underbrace{11\cdots1}_{n個})+1]^2}$$

$$= 6\times(\underbrace{11\cdots1}_{n個})+1$$

$$= \underbrace{666\cdots6}_{n個}7.$$

從而證明了猜想的正確性(它並不是用**“數學歸納法”**證明).

〔**例 4**〕證明：具有下列形式

$$N = \underbrace{11\cdots1}_{(n-1)個}\underbrace{2\cdots25}_{n個}$$

的數是完全平方數.

〔**證明**〕當 $n=1$ 時　$N=25=5^2$,

當 $n=2$ 時　$N=1225=35^2$,

當 $n=3$ 時　$N=112225$,通過計算知 $112225=335^2$,

當 $n=4$ 時　$N=11122225$,通過計算知 $11122225=3335^2$.

我們猜想

$$\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)個}\underbrace{2\cdots25}_{n個} = \underbrace{33\cdots3}_{(n-1)個}5.$$

下面證明這個猜想的正確性：

$$N = \underbrace{11\cdots1}_{(n-1)個}\underbrace{2\cdots25}_{n個}$$

$$= 10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^{n+1}+2\times10^n+2\times10^{n-1}+\cdots+2\times10+5$$

$$= 10^n(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10)+2\times(10^n+10^{n-1}+\cdots+10)+5$$

$$= 10^n\times\frac{10(10^{n-1}-1)}{10-1}+2\times\frac{10(10^n-1)}{10-1}+5$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2n}+10^{n+1}+25)$$

$$= (\frac{10^n+5}{3})^2$$

注意到分子 10^n+5 各位數字之和爲6,所以 10^n+5 爲3的倍數,所以 $\frac{10^n+5}{3}$ 爲整數. 因此,N 爲完全平方數.

〔**例 5**〕證明數列 12,1122,111333,… 的每一項都是相鄰兩個整數之積.

〔**證明**〕$12=3\times4$,

$1122=33\times34$,

$111222 = 333 \times 334.$

我們猜想

$$\underbrace{11\cdots1}_{n個}\underbrace{22\cdots2}_{n個} = \underbrace{33\cdots3}_{n個} \times (\underbrace{33\cdots3}_{n個} + 1).$$

下面證明這個猜想的正確性:

$$\begin{aligned} a_n &= \underbrace{11\cdots1}_{n個}\underbrace{22\cdots2}_{n個} \\ &= \underbrace{11\cdots1}_{n個} \times 10^n + 2 \times \underbrace{11\cdots1}_{n個} \\ &= \underbrace{11\cdots1}_{n個} \times (10^n + 2). \end{aligned}$$

令 $m = \underbrace{11\cdots1}_{n個}$,則 $10^n + 2 = \underbrace{99\cdots9}_{n個} + 3 = 9m + 3$.

所以 $a_n = m(9m+3) = 3m(3m+1)$. 猜想正確,因此本題得證.

〔**例** 4〕和〔**例** 5〕所寫的猜想過程可以略去,因爲題目已明確提出所要證明的結論,但我們還是寫下**“試驗 —— 歸納 —— 猜想”**這三步,目的是讓我們學會這種歸納推理的思考方法,〔**例** 3〕至〔**例** 5〕之證明用的是演繹法.

(四)“歸納法”和“數學歸納法”的再反思

從分析一些特例的共同特徵,進而得出一般性結論,這種由特殊到一般的推理方法稱爲**“歸納法”**.

“歸納法”包括**“完全歸納法”**和**“不完全歸納法”**.

“完全歸納法”適用於研究對象的個數是有限的,或對象分類有限,并且不很大的情況.

“不完全歸納法”不僅可適用於研究對象無限多個,也適用於研究對象的數目有限(但數目較大)的情況.

我們先看以下的幾個推理過程.

〔**例** 1〕三個人從裝滿各種顏色的球袋中摸球,甲摸出一個是黄球,乙摸出的一個也是黄球,丙摸出的一個還是黄球,因此可以説**“三個人摸出的都是黄球.”**(但絕不可以説球袋中的球都是黄球!)

〔**例** 2〕某班學生某星期的星期一、星期二無人遲到,星期三、四、五、六也都無人遲到,所以可以説**“這個班的學生這個星期無人遲到.”**(但絕對不可以説該班的學生全學期都無人遲到!)

〔**例** 3〕在 $f(x) = x^2 + x + 11$ 中,分雖令 $x = 1, 2, \cdots, 9$,得

$f(1) = 13$ 是質數;$f(2) = 17$ 是質數;$f(3) = 33$ 是質數;

$f(4) = 31$ 是質數;$f(5) = 41$ 是質數;$f(6) = 53$ 是質數;

$f(7) = 67$ 是質數;$f(8) = 83$ 是質數;$f(9) = 101$ 是質數.

從而可以得出結論**“當 x 是小於 10 的正整數時,函數 $f(x) = x^2 + x + 11$ 的值總是質**

數.”(但絕對不可以說,對於任意正整數 n,$f(x) = x^2 + x + 11$ 的值都是質數!事實上,至少我們知道,當 $x = 10$ 時,$f(10) = 11^2$ 是合數而不是質數.)

以上這些通過**枚舉**而得到結論的推理方法,就是**完全歸納法**. 這種歸納法是對考察對象一一考察之後,經過歸納而得出結論(也即這些對象的共同特徵),因此完全歸納法所得出的結論是正確的.

例1、例2和例3都是用“**完全歸納法**”論證命題的典型例題.

應用完全歸納法時,要對考察的對象進行合理的分類,使其既不重復也不遺漏,遺漏了則結論沒有普遍性,重復了則勞而無功. **完全歸納法**是一種嚴格的證明方法. 當考察的對象數目有限,并且對象數目不很大時,我們常用這種方法.

〔**例4**〕求證:滿足不等式 $2 \leq n \leq 15$ 的每一個自然數 n,或者是素數,或者可以表示爲不多於三個素數的乘積.

〔**證明**〕考慮2到15的每一個自然數,其中2,3,5,7,11,13是素數,4,6,9,10,14,15可以表示爲兩個素數的乘積;數8,12可以表示爲三個素數的乘積. 所以命題得證.

〔**例5**〕求任給五個整數,求證:必能從其中選出三個,使它們的和能被3整除.(安徽省1978年中學生數學競賽第二試第2題)

〔**證明**〕任何一個整數被3除所得的餘數只能是0,1,2中的一個,在給定的五個整數被3除所得的五個餘數只有以下三種可能:

若0,1,2三種都有,則餘數爲0,1,2的三個數之和能被3整除.

若五個餘數中只出現0,1,2中的兩個數,則由抽屜原理知,必有一個餘數至少出現三次,選取餘數相同的這三個數,則它們的和能被3整除.

若五個餘數中只出現0,1,2中的一個數,那麼在給定的五個數(全部爲同一個0,或同一個1,或同一個2)中任選三個,則它們的和能被3整除.

綜上所述,從任意五個整數中,一定可以取出三個數,使它們的和能被3整除.

本例的分類,是用五個整數被3除所得的餘數,出現在0,1,2中的三個、二個、一個來分的,這樣分類是合理的,也容易得到證明. 證明中,用到“**抽屜原則** *”.

〔**注**〕* 這裏用到抽屜原則:把 $m(m \geq 1)$ 個東西分成 n 個組,當 n 除不盡 m 的時候,也就是說,$m = nq + r(0 < r < n)$ 時,那麼至少有一個組裏面至少含有 $q + 1$ 個東西.

例4和例5的證明過程體現了“**合理分類**”(不重復也不遺漏)的**數學思想**.

〔**例6**〕觀察以下等式:

$$1 = 1,$$

$$1 - 4 = -3,$$

$$1 - 4 + 9 = 6,$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -10$$

我們試圖找出更多的“**同類等式**”,以便找出具有“**共同特徵**”的一般性等式,爲此我們要找出“**共同特徵**”,找出規律.“**試一試**”改造以上等式,

$(n=1)\quad 1=1,$

$(n=2)\quad 1-4=-3=-(1+2),$

$(n=3)\quad 1-4+9=6=1+2+3,$

$(n=4)\quad 1-4+9-16=-10=-(1+2+3+4),$

我們發現,式子的左邊依次出現 1,4,9,16,它們恰好爲前 4 個正整數(也即 4 個等式的序號)1,2,3,4 的平方,符號交錯變化;而右邊依次出現了前 1 個正整數的和,前 2 個正整數的和,前 3 個正整數的和,前 4 個正整數的和,符號交錯變化,因此可以大膽猜想第 n 個等式爲:

$$1-4-9-16+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}(1+2+\cdots+n)=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

從**"試一試"**開始,用**"觀察、歸納、猜想"**揭示規律,找到結論,這種推理的方法稱爲**"不完全歸納法"**.

"不完全歸納法"是通過對某類事物中的部分對象的研究,概括出關於該類事物的一般性結論的推理方法. 這種先"試一試",再逐步加以歸納,最後猜想出一般規律的方法,雖然不是嚴密的邏輯論證的方法,但是它對於發現新的命題,概括新的性質,又是不可缺少的.

"不完全歸納法"的一般推理形式是:

S_1 具有(或不具有)P,

S_2 具有(或不具有)P,

S_3 具有(或不具有)P,

……

S_n 具有(或不具有)P(最後猜想出結論).

($S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是某類事物的部分對象,在考察中沒有遇到矛盾的情形.)

那麼,某類事物具有(或不具有)P.

應用**"不完全歸納法"**的一個步驟是先找出幾個特殊的對象進行試驗,然後歸納出共同特徵,最後作出一種比較合理的猜想,即**"試驗——歸納——猜想"**. 至於要考察多少特殊對象,那就要看具體情況,一般來說,總要使我們能比較有根據地猜想出一般規律爲止. 當然,用**"不完全歸納法"**作出的猜想,其正確與否還要經過嚴格的證明或證僞(舉反例),這一點是不可忽視的.

"不完全歸納法"對發現新的命題,概括新的性質有重要作用,我們應該逐步掌握這一數學方法. 這不僅是學好數學基礎知識的需要,也是培養獨立思考能力、觀察與分析能力、發展與創新能力的需要.

〔**例 7**〕對於非負整數 n,形如 2^{2^n+1} 的數(**費爾馬數**)都是素數(質數)——出名的**"費爾馬猜想"**(費爾馬——1601 - 1665 年法國數學家).

〔**解**〕費爾馬數,當 $n=0,1,2,3,4$ 時,都是素數:

$$F_0 = 2^{2^{0}} + 1 = 3,$$

$$F_1 = 2^{2^{1}} + 1 = 5,$$

$$F_2 = 2^{2^{2}} + 1 = 17,$$

$$F_3 = 2^{2^{3}} + 1 = 257,$$

$$F_4 = 2^{2^{4}} + 1 = 65537.$$

然而,**這個猜想是錯誤的**. 過了不久,**瑞士數學家歐拉**(1707 – 1783 年) 證明了

$$F_5 = 2^{2^{5}} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

是合數. 後來又有大發現,當 $n = 12$ 時,

$$F_{12} = 2^{1^{12}} + 1 = 2^{4096} + 1$$ 也可以被 114689 整除,

當 $n = 23$ 時,

$$F_{23} = 2^{2^{23}} + 1$$ 也可以被 167772161 整除.

我們還可以舉個例子,歷史上曾有人驗證過當 $n = 1,2,3,\cdots,11000$ 時,$f(n) = n^2 + n + 72491$ 的值是素數. 能否說對一切自然數 $f(n)$ 的值是素數呢?不對. 事實上,當 $n = 72490$ 時,

$$\begin{aligned} f(72490) &= 72490^2 + 72490 + 72491 \\ &= 72490^2 + 2 \times 72490 + 1 \\ &= (72490 + 1)^2 \\ &= 72491^2 \end{aligned}$$

是合數了.

我在拜讀了**華羅庚**先生的著作**《數學歸納法》**時,還可進一步發現,當 $n = 4$ 時,$n^2 + n + 72491 = 4^2 + 4 + 72491 = 20 + 72491 = 72511 = 59 \times 1229$ 也是合數,而不是素數(質數).

〔注〕華羅庚先生之著作**《數學歸納法》**$P7 - P8$ 之〔例 7〕之(2)“當 $n = 1,2,3,\cdots,11000$ 的時候,式子 $n^2 + n + 72491$ 是素數”—— **這個結論是錯誤的**,因爲如上所述當 $n = 4$ 時,$n^2 + n + 72491 = 72511 = 59 \times 1229$ 爲**合數**,而非**素數(質數)**.

通過**例 3 至例** 7 的展示,再次使我們認識到由於用**“不完全歸納法”**作出的猜想不一定正確,因此要經過嚴格論證加以肯定,或舉反例加以否定. 與自然數 n 有關的命題,常用兩個步驟(實即兩個命題) 來證明它們的正確性.

(1) 驗證當 n 取第一個 n_0(如 $n_0 = 1$ 或 $n_0 = 2$ 等) 時,命題成立.

(2) 假設當 $n = k(k \geq n_0, k \in N)$ 時命題成立,應用假設證明 $n = k + 1$ 時,命題也成立.

這種證明方法稱爲**“數學歸納法”,它屬於“推理論证的演繹法”而非“歸納法”**.

“歸納法”是一種發現結論的方法,用以發現規律,作出猜想的方法. 而“數學歸納法”是對猜想的正確性加以肯定的一種嚴格論证方法. 二者概念不同,但卻是相互聯繫的.

運用“數學歸納法”論證命題時,兩個步驟缺一不可. 第一個步驟稱爲**“歸納奠基”**,是證明的基礎;而第二個步驟稱爲**“歸納遞推”**,它反映了無限遞推關係. 第二個步驟中假設 $n = k$ 時命題成立稱爲**“歸納假設”**. **“歸納遞推”的基本搆思,也是中心任務在於“一湊假設,**

二湊結論”,設法接納、使用“歸納假設”於“遞推論证”中,從而推证出“歸納目標”,進而證明命題.

“數學歸納法”常用於證明與自然數有關的問題,但非所有與自然數有關的命題都可以用**“數學歸納法”**證明.

參考資料:

[1] 華羅庚著:《數學歸納法》,上海教育出版社 1963 年版.

[2] 鄭隆炘著:《歸納與遞推》,湖北教育出版社 1984 年版.

[3] 顏同照著:《歸納與遞推》,商務印書館 1984 年版.

[4] 張明志著:《數學歸納法》,湖北教育出版社 1984 年版.

[5] 唐以榮著:《中學數學綜合題解題規律講義》,西南師範大學出版社 1987 年版.

[6] 鄭子傑著:《數學歸納法還是數學演繹法?》,《香港青鬆中學教師論文選》第二輯,2000 年 11 月版.

[7] 鄭志民編著:《學海浪花 —— 數學教育閑思集》,中國社會科學出版社 2012 年版.

平均不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的理解及應用初步

勞工子弟學校　董淑珍　肖芳　施振雄

平均不等式是中學階段一個非常重要的不等式，它在求函數最值、比較大小、以及證明不等式等方面有著重要的應用.

平均不等式：$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$，其中 $a,b \in R^+$，當且僅當 $a=b$ 時，取“$=$”.

文字語言：“兩個正數的算術平均數不小於它們的幾何平均數”，或者“兩個正數的等差中項不小於它們正的等比中項”.

推廣：

1. 平均不等式的變形：$ad \leq (\frac{a+b}{2})^2$（$a,b \in R^+$，當且僅當 $a=b$ 時，取“$=$”）；

2. $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$（$a,b \in R$，當且僅當 $a=b$ 時，取“$=$”）；

3. $\frac{a_1+a_2+\Lambda+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\Lambda a_n}$（$a_1,a_2,\Lambda,a_n \in R^+$，當且僅 $a_1=a_2=\Lambda=a_n$ 時，取“$=$”）.

（一）平均不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的證明.

〔**證明**〕$\because a,b$ 爲正數，

$\therefore (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$，　$\therefore a+b \geq 2\sqrt{ab}$，　即 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

（二）平均不等式的理解.

從數列的角度看，a，b 的算術平均數是 a，b 的等差中項，而 a，b 的幾何平均數是 a，b 正的等比中項，所以這個不等式稱爲平均不等式. 在平均不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 中，當兩個正數的積爲定值時，即 $ab=P$（定值）時，平均不等式爲 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}=\sqrt{P}$，有 $a+b \geq 2\sqrt{P}$，故它們的和有最小值 $2\sqrt{P}$；當兩個正數的和爲定值時（即 $a+b=S$ 爲定值），平均不等式爲 $\frac{S}{2} \geq \sqrt{ab}$，即 $\sqrt{ab} \leq \frac{S}{2}$，可得 $ab \leq \left(\frac{S}{2}\right)^2$，所以它們積有最大值. 就是我們通常所說的**“積定和最小，和定積最大”**.

在利用平均不等式求最值時，要注意求最值的條件:**“一正，二定，三取等”**. **“一正”**即公式中 a，b 必須爲正數 ;“二定” 即和爲定值或者是積爲定值; **“三取等”** 即公式中的等號必須成立. 這三個條件缺一不可.

〔**例** 1〕求函數 $y = log_2x + \frac{4}{log_2x}(0 < x < 1)$ 的範圍.

〔**錯解**〕$y = log_2x + \frac{4}{log_2x} \geq 2\sqrt{log_2x \cdot \frac{4}{log_2x}} = 4.$

錯誤的原因是當 $0 < x < 1$ 時,$log_2x < 0$，且$\frac{4}{log_2x} < 0$，不滿足平均不等式的“一正” 的條件.

〔**正解**〕$\because 0 < x < 1$

$\therefore log_2x < 0 \Rightarrow -log_2x > 0$

$\therefore \ -log_2x + \frac{4}{-log_2x} \geq 2\sqrt{(-log_2x) \cdot \frac{4}{-log_2x}} = 4.$

即 $-y \geq 4$ 從而 $y \leq -4$. 當且僅當 $-log_2x = \frac{4}{-log_2x} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ 時，取等號.

〔**例** 2〕已知 $x > 2$，求函數 $y = x + \frac{4}{x-2}$ 的最大值.

〔**解**〕當 $X > 2$ 時，有 $X - 2 > 0$，故

$$y = x + \frac{4}{x-2} = x - 2 + \frac{4}{x-2} + 2 \geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{4}{x-2}} + 2 = 6,$$

當且僅當 $x - 2 = \frac{4}{x-2}$ 時，即 $x = 4$ 時，取等號.

〔**點評**〕此題爲兩式子之和的形式,但其積不是定值,需要變形使三個因式之積爲定值,纔可以應用平均不等式.

〔**例** 3〕求函數 $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值.

〔**錯解**〕$y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \geq 2,$

當且僅當 $\sqrt{x^2+4} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 時取等號.

但是解方程 $\sqrt{x^2+4} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,得 $x^2 + 4 = 1$,所以 $x^2 = -3$(無實解).

〔**正解**〕$\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{3}{4}\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{4}\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ *

$$\geq \frac{3}{4}\sqrt{x^2+4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{x^2+4}g\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

當且僅當 $x=0$ 時,不等式取等號.

故 $\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值爲$\dfrac{5}{2}$.

〔**點評**〕式中 * 湊係數的技巧關鍵在於,先估計 $x=0$ 時 y 取得最小值. 然後再配以係數 k,使得 $k\sqrt{x^2+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,故可知 $k=\dfrac{1}{4}$.

〔**別解**〕$y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, 令 $t=\sqrt{x^2+4}$,則 $y=t+\dfrac{1}{t}(t\geq 2)$.

由 $y'=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$ 知, 當 $t\in[1,+\infty)$ 時函數單調遞增.

所以 $t=2$ 時, 即 $x=0$ 時, $y_{min}=\dfrac{5}{2}$.

(三)應用舉例.

1. **求最值.**

〔**例 4**〕**已知** $0<x<\dfrac{8}{3}$**, 求函數** $y=x(8-3x)$ **的最大值.**

〔**分析**〕由 $0<x<\dfrac{8}{3}$ 知,$8-3x>0$. 函數爲兩個因式積的形式, 其和 $x+8-3x=8-2x$ 不是定值, 但是 $3x+8-3x=8$. 所以

$y=x(8-3x)=\dfrac{1}{3}\cdot[3x(8-3x)]\leq\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3x+8-3x}{2}\right)^2=\dfrac{16}{3}$. 當且僅當 $3x=8-3x$, 即 $x=\dfrac{4}{3}$ 時取等號.

所以當 $x=\dfrac{4}{3}$ 時, 函數 $y=x(8-3x)$ 的最大值爲$\dfrac{16}{3}$.

〔**點評**〕此題爲兩個因式積的形式,但其和不是定值. 湊係數後可得到和爲定值,從而利用平均不等式求最大值.

2. **比較大小.**

〔**例 5**〕若 $a>b>1$,$P=\sqrt{lga\cdot lgb}$,$\theta=\dfrac{1}{2}(lga+lgb)$,$R=lg\dfrac{a+b}{2}$,則(　　).

A. $R<P<\theta$　　*B*. $P<\theta<R$　　*C*. $\theta<P<R$　　*D*. $P<R<\theta$

〔**解**〕$\because a>b>1$, 函數 $y=lgx(x>0)$ 是增函數

$\therefore lga>0$, $lgb>0$, 且 $lga\neq lgb$.

$\therefore P=\sqrt{lga\cdot lgb}<\dfrac{1}{2}(lga+lgb)=\theta=lg\sqrt{ab}<lg\dfrac{a+b}{2}=R$　所以選 *B*.

〔**點評**〕連續用了兩次平均不等式,利用 a 與 b 不等,從而 lga 與 lgb 不等,保證兩次不等號成立,可以比較大小.

3. **證明不等式.**

〔**例 6**〕已知 $a > b > 0$,求證:$a + \frac{1}{(a-b)b} \geq 3$,並說明 a,b 分別爲何值時取等號.

〔**證明**〕由 $a > b > 0$,得 $a - b > 0$,

$\therefore a + \frac{1}{(a-b)b} = (a-b) + b + \frac{1}{(a-b)b} \geq 3\sqrt[3]{(a-b)b\frac{1}{(a-b)b}} = 3$,當且僅當 $a - b = b = \frac{1}{(a-b)b} = 1$,即 $a = 2, b = 1$ 時取等號.

〔**點評**〕此題爲兩個式子和的形式,但其和積不是定值. 湊成三項後可得到積爲定值,從而利用平均不等式的推廣式證明不等式.

(四) 平均不等式變形 (1) $(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$ ($a,b \in R^+$,當且僅當 $a = b$ 時,取“$=$”) 與不等式 (2) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ (當且僅當 $a = b$ 時,取“$=$”) 的比較.

〔**解**〕$\because a,b$ 爲正數,$\therefore (a-b)^2 \geq 0$,則 $a^2 + b^2 \geq 2ab$,即不等(2) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ 成立.

這個時候,我們要問,若 $a,b \in R^+$,這兩個不等式是一樣的嗎?

$\because (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \leq \frac{a^2+b^2+a^2+b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}$(當且僅當 $a = b$ 時,取“$=$”).

$\therefore$ (1) 可以推出(2),但由(2) 不可能推出(1),即不等式(1),(2) 並非等價.

進一步,我們要問求 ab 的最大值時,何時用不等式(1),何時用不等式(2) 呢?

請看下面的例題.

〔**例 7**〕(1) 求半徑爲 R 的圓的內接矩形面積的最大值,此時長寬各爲多少?

(2) 將一根 10 米的鐵絲圍成一個矩形,問矩形的長寬各爲多少時,矩形的面積最大?

〔**解**〕(1) 設圓內接矩形的長、寬分別爲 x、y 米, 依題意有 $x^2 + y^2 = (2R)^2$.

$\because xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} = 2R^2$,當且僅當 $x = y$ 時,不等式中等號成立.

此時 $x = y = \sqrt{2}R$.

因此, 當該矩形的長和寬都是$\sqrt{2}R$ 時, 它的面積最大.

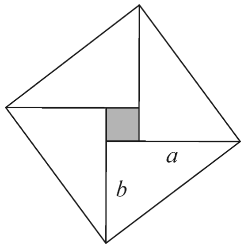
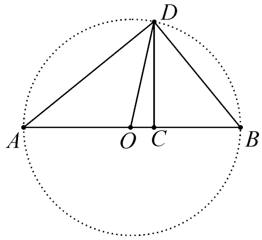
〔**解**〕(2) 設矩形的長、寬分別爲 x、y 米,依題意有:$2(x+y) = 10$,即 $x + y = 5$,矩形的面積爲 xy.

$\because xy \leq (\frac{x+y}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$,$\therefore xy \leq \frac{25}{4}$,當且僅當 $x = y$ 時, 式中等號成立, 此時 $x = y = \frac{5}{2}$.

因此, 當該矩形的長寬都是$\frac{5}{2}$ 米時, 它的面積最大.

〔**點評**〕當 $a > 0, b > 0$ 時,根據已知條件能推出 $a + b$ 爲定值就用(1),能推出 $a^2 + b^2$ 爲定值就用(2),若都能推出 $a + b, a^2 + b^2$ 均爲定值時,(1) 和(2) 都可用!

（五）兩個不等式的幾何解釋欣賞

不等式	圖形	幾何解釋
$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ （$a,b \in R$,當且僅當 $a=b$ 時，取“ = ”）.		外面正方形的邊長爲 $\sqrt{a^2+b^2}$,所以面積爲 a^2+b^2. 而四全等直角三角形的面積和爲 $4 \cdot \dfrac{1}{2}ab=2ab$. 由圖得知,$a^2+b^2 \geq 2ab$,即 $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.
$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ （$a,b \in R^+$，當且僅當 $a=b$ 時，取“ = ”）.		如圖，$AC=a$，$BC=b$，以 AB 爲直徑作圓 O，過 C 作 AB 的垂線交圓於點 D，連結 OD，CD. 則有 $OD=\dfrac{a+b}{2}$,$CD=\sqrt{ab}$. $Rt\triangle DOC$ 中 $OD>CD$. 當 C 爲 AB 的中點時（$a=b$），OD 與 CD 重合. 由圖得知，$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

平均不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的兩種加强形式

濠江中學高二級　談皓　　指道老師魏均僑

對任意 $a,b>0$, $A_2=\dfrac{a+b}{2}$ 稱爲正數 a,b 的算術平均數, $G_2=\sqrt{ab}$ 稱爲正數 a,b 的幾何平均數. 有著名的平均不等式:

$$A_2=\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}=G_2.$$

當且僅當 $a=b$ 時上述不等式取等號,不等式被稱爲平均不等式. 平均不等式可推廣到三元或多元的情況,即

$$A_3=\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}=G_3.$$

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\Lambda+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\Lambda a_n}=G_n.$$

其中 $a,b,c>0$ 以及 $a_1,a_2,\Lambda,a_n>0$. 當且僅當 $a=b=c$ 以及 $a_1=a_2=\Lambda=a_n$ 時不等式取等號. 本文將研究平均不等式 $A_n \geq G_n$ 的加强形式.

二元平均不等式的加强形式一:

已知 $a \geq b>0$,則

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq A_2-G_2 \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$$

〔**證明**〕因爲 $A_2=\dfrac{a+b}{2}$, $G_2=\sqrt{ab}$,所以 $a+b=2A_2$, $ab=G_2{}^2$,原不等式等價於

$$\frac{(2A_2)^2-4G_2{}^2}{8a} \leq A_2-G_2 \leq \frac{(2A_2)^2-4G_2{}^2}{8b}.$$

$$\frac{A_2{}^2-G_2{}^2}{2a} \leq A_2-G_2 \leq \frac{A_2{}^2-G_2{}^2}{2b}.$$

$$\frac{(A_2-G_2)(A_2+G_2)}{2a} \leq A_2-G_2 \leq \frac{(A_2-G_2)(A_2+G_2)}{2b}.$$

若 $A_2-G_2=0$,即 $a=b$,此時易知上面的不等式成立.

若 $A_2-G_2>0$,即 $a \neq b$,不等式可消去公因子 A_2-G_2,我們只需證明 $\dfrac{A_2+G_2}{2a} \leq 1 \leq \dfrac{A_2+G_2}{2b}$.

注意到$a > A_2 > G_2 > b$,因此$\frac{A_2 + G_2}{2a} < \frac{a + a}{2a} = 1$,以及$\frac{A_2 + G_2}{2b} > \frac{b + b}{2b} = 1$. 從而不等式的等價形式成立. 原不等式得證.

觀察以上證明步驟,注意到$\frac{(a - b)^2}{8a} = \frac{(a + b)^2 - 2^2 ab}{2^3 a}$,我們可把以上加強形式略加變形推廣到三元的情況.

三元平均不等式的加强形式一:

已知$a \geq b \geq c > 0$,則

$$\frac{(a + b + c)^3 - 27abc}{81a^2} \leq A_3 - G_3 \leq \frac{(a + b + c)^3 - 27abc}{81c^2}.$$

〔**證明**〕因爲$A_3 = \frac{a + b + c}{3}$,$G_3 = \sqrt[3]{abc}$,則$a + b + c = 3A_3$,$abc = G_3{}^3$,原不等式等價於

$$\frac{(3A_3)^3 - 27G_3{}^3}{81a^2} \leq A_3 - G_3 \leq \frac{(3A_3)^3 - 27G_3{}^3}{81c^2},$$

$$\frac{A_3{}^3 - G_3{}^3}{3a^2} \leq A_3 - G_3 \leq \frac{A_3{}^3 - G_3{}^3}{3c^2},$$

$$\frac{(A_3 - G_3)(A_3{}^2 + A_3G_3 + G_3{}^2)}{3a^2} \leq A_3 - G_3 \leq \frac{(A_3 - G_3)(A_3{}^2 + A_3G_3 + G_3{}^2)}{3c^2}.$$

若$A_3 - G_3 = 0$,即$a = b = c$,此時易知上不等式成立.

若$A_3 - G_3 > 0$,即a、b和c不全相等,不等式可消去公因子$A_3 - G_3$,我們只需證明

$$\frac{A_3{}^2 + A_3G_3 + G_3{}^2}{3a^2} \leq 1 \leq \frac{A_3{}^2 + A_3G_3 + G_3{}^2}{3c^2}. \cdots\cdots ①$$

注意到$a \geq A_3 > G_3 \geq c$,因此$\frac{A_3{}^2 + A_3G_3 + G_3{}^2}{3a^2} \leq \frac{a^2 + a^2 + a^2}{3a^2} = 1$,以及$\frac{A_3{}^2 + A_3G_3 + G_3{}^2}{3c^2} \geq \frac{c^2 + c^2 + c^2}{3c^2} = 1$. 從而不等式的等價形式成立. 原不等式得證.

以上證明步驟可進一步推廣,更一般地我們可得到多元的情況.

n元平均不等式的加强形式一:

已知$a_1 \geq a_2 \geq \Lambda \geq a_n > 0$,則

$$\frac{(a_1 + a_2 + \Lambda + a_n)^n - n^n a_1 a_2 \Lambda a_n}{n^{n+1} a_1{}^{n-1}} \leq A_n - G_n \leq \frac{(a_1 + a_2 + \Lambda + a_n)^n - n^n a_1 a_2 \Lambda a_n}{n^{n+1} a_n{}^{n-1}}$$

其證明與三元的情況類似,這裏不作詳細說明.

觀察上述不等式的分母,二元時爲$8a$和$8b$,三元時爲$81a^2$和$81c^2$,n元時爲$n^{n+1}a_1{}^{n-1}$和$n^{n+1}a_n{}^{n-1}$,我們希望讓分母進一步優化,讓不等式加強的範圍更小一點. 由此我們得到以下加強形式二.

二元平均值不等式的加强形式二:

已知$a \geq b > 0$,則

$$\frac{(a-b)^2}{8A_2} \leq A_2 - G_2 \leq \frac{(a-b)^2}{8G_2}.$$

三元平均值不等式的加强形式二：

已知 $a \geq b \geq c > 0$,則

$$\frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{81{A_3}^2} \leq A_3 - G_3 \leq \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{81{G_3}^2}.$$

n 元平均值不等式的加强形式二：

已知 $a_1 \geq a_2 \geq \Lambda \geq a_n > 0$,則

$$\frac{(a_1 + a_2 + \Lambda + a_n)^n - n^n a_1 a_2 \Lambda a_n}{n^{n+1}{A_n}^{n-1}} \leq A_n - G_n \leq \frac{(a_1 + a_2 + \Lambda + a_n)^n - n^n a_1 a_2 \Lambda a_n}{n^{n+1}{G_n}^{n-1}}.$$

爲證明以上加強形式,我們取三元的情況進行說明. 分母被取代爲 $81{A_3}^2$ 和 $81{G_3}^2$ 後,不等式 ① 改變爲

$$\frac{{A_3}^2 + A_3G_3 + {G_3}^2}{3{A_3}^2} \leq 1 \leq \frac{{A_3}^2 + A_3G_3 + {G_3}^2}{3{G_3}^2}. \cdots\cdots ②$$

注意到 $A_3 \geq G_3$,因此 $\frac{{A_3}^2 + A_3G_3 + {G_3}^2}{3{A_3}^2} \leq \frac{{A_3}^2 + {A_3}^2 + {A_3}^2}{3{A_3}^2} = 1$ 以及 $\frac{{A_3}^2 + A_3G_3 + {G_3}^2}{3{G_3}^2} \geq \frac{{G_3}^2 + {G_3}^2 + {G_3}^2}{3{G_3}^2} = 1$. 由此得到了加強形式二的證明.

至此,我們完整地給出了平均值不等式加強的兩種形式以及相應的證明,這也爲進一步研究算術平均數與幾何平均數的不等關係給出了重要的結論.

用點圓與根軸定理巧解幾何題

濠江中學高二級　劉嘉德　　指道老師魏均僑

點和線在平面上的組合關係構成了多姿多彩的平面幾何世界. 在解決幾何問題時,我們大部分時間都在考慮線和角的關係,卻往往忽略了點在幾何中所扮演的角色. 可是,你是否想過這些平凡的點能夠給予我們無窮無盡的思維創造空間,讓我們產生"柳暗花明又一村"的感覺?我們總喜歡討論圓的性質,例如圓周角定理、弦切角定理等等,但你是否又想過被我們所忽視的點也是一個圓呢?只不過它是一個半徑爲 0 的圓而已. 用此角度看問題,問題就變得很有趣了,你會發現你所熟悉的幾何圖形中的點都是由一個又一個半徑爲 0 的圓所組成. **為方便稱呼它們,我們稱之為"點圓". 別少看這些點圓. 它們的存在往往能夠讓一些高難度的幾何問題迎刃而解. 本文我們將著重討論點圓與根軸定理的關係,並給出若干使用點圓來證明幾何問題的巧妙解題手法.**

首先我們給大家已熟悉的點到圓的冪下定義:已知 $\odot O$ 半徑爲 r,P 爲 $\odot O$ 所在平面上任意一點,則 $PO^2 - r^2$ 就是點 P 到 $\odot O$ 的冪.

與此同時,圓冪定理指的是:已知 $\odot O$ 的半徑爲 r,P 爲 $\odot O$ 所在平面上任意一點,過 P 作 $\odot O$ 的割線交圓於 A,B,記 P 對於 $\odot O$ 的冪爲 k,則 $k = PO^2 - r^2$. 當 P 在圓外時,$k = PA \cdot PB > 0$;當 P 在圓內時,$k = -PA \cdot PB < 0$;當 P 在圓上時,$k = 0$.

根軸定理是本文所要研究的對象,我們先給出根軸定理及其證明,再把根軸定理推廣到點圓的情況.

根軸定理:(1) 到兩圓等冪的點的軌跡若存在,它就是與此兩圓的連心線垂直的一條直線,這條直線稱為兩圓的根軸.

(a) 若兩圓相交,其根軸就是兩圓的公共弦所在直線;

(b) 若兩圓相切(外切或內切),其根軸就是過兩圓公切點的公切線;

(c) 若兩圓外離,則兩圓四條公切線的中點共線,其根軸就是此四點所在的直線;

(d) 若兩圓內含且同心,其根軸不存在;

(e) 若兩圓內含且不同心,任意作一圓與兩圓相交,三圓圓心不共線,則所成兩公共弦所在直線的交點在根軸上,同理再作另一交點,此兩交點連線所在的直線就是根軸.

(2) 不同心的三個圓兩兩的根軸或相交於一點、或互相平行、或完全重合. 若相交於一點,該點稱為三個圓的根心.

(a) 當三圓的圓心共線時,則三條根軸或互相平行、或完全重合;

（b）當三圓的圓心不共線時，則根心存在，此時三個圓的根心對於三個圓等冪；

（c）特別地，當三圓兩兩相交時，三條公共弦（就是兩圓的根軸）所在直線交於一點.

〔**證明**〕（1）我們證明存在的兩圓等冪點的軌跡是直線，且垂直於連心線.

設點 P 對兩圓等冪，M 爲 O_1O_2 的中點，連結 PM，過 P 作 PC 垂直於 O_1O_2（或 O_1O_2 延長線）於 C.

設 $\odot O_1$ 的半徑爲 R_1，$\odot O_2$ 的半徑爲 R_2，$\angle PMO_2 = \alpha$，我們分兩種情況進行討論.

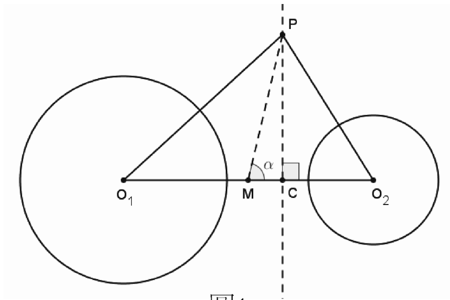


圖1

〔**情況一**〕若點 C 在 O_1O_2 上（見圖 1），注意到 $MO_1 = MO_2$，$PMcos\alpha = CM$，我們有

P 對 $\odot O_1$ 的冪 $=$ P 對 $\odot O_2$ 的冪，

$$PO_1{}^2 - R_1{}^2 = PO_2{}^2 - R_2{}^2,$$

$$PO_1{}^2 - PO_2{}^2 = R_1{}^2 - R_2{}^2,$$

$$(PM^2 + MO_1{}^2 + 2PM \cdot MO_1 cos\alpha) - (PM^2 + MO_2{}^2 - 2PM \cdot MO_2 cos\alpha) = R_1{}^2 - R_2{}^2,$$

$$4MO_2 \cdot PMcos\alpha = R_1{}^2 - R_2{}^2,$$

$$2O_1O_2 \cdot CM = R_1{}^2 - R_2{}^2,$$

$$CM = \frac{R_1{}^2 - R_2{}^2}{2O_1O_2}.$$

由此可見，CM 爲定值，而 O_1M 又爲定值，因此 O_1C 爲定值. 從而證得等冪的點必在垂線 PC 上.

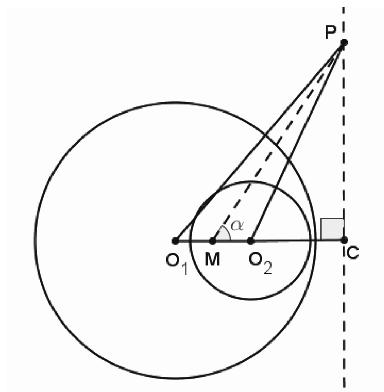


圖2

〔**情況二**〕若點 C 在 O_1O_2 的延長線上（見圖 2），同理可得 $CM = \dfrac{R_1{}^2 - R_2{}^2}{2O_1O_2}$. 從而證得等冪的點必在垂線 PC 上.

（a）若兩圓相交（見圖 3），我們有 $PC \cdot PD = PA \cdot PB = PE \cdot PF$，直線 AB 上任意一點關於兩圓等冪，而 $PB \perp O_1O_2$，所以直線 O_1O_2 是根軸.

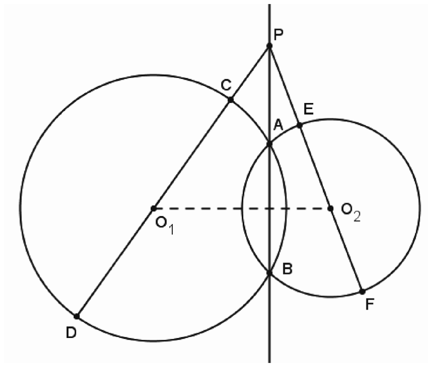


圖3

（b）若兩圓外切（見圖 4），我們有 $PC \cdot PD = PA^2 = PE \cdot PF$，直線 PA 上任意一點關於兩圓等冪，而 $PA \perp O_1O_2$，所以直線 O_1O_2 是根軸. 同理可得兩圓內切的情況.

（c）若兩圓外離，由對稱性知，四條公切線的中點一定共線，且所在直線必垂直於 O_1O_2（見圖 5）. 注意到公切線中點到兩圓的切線長相等，即 $MA^2 = MB^2$，$NC^2 = ND^2$，$PE^2 = PF^2$，$QG^2 = QH^2$. 因此四中點關於兩圓等冪，從而證得公切線中點必在根軸上. 命題得證.

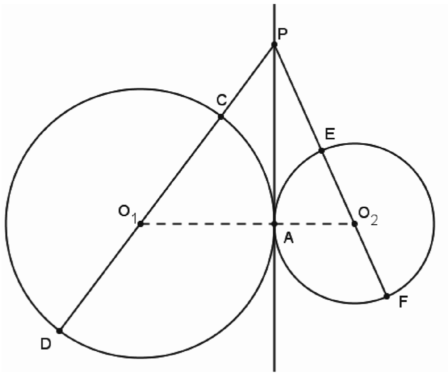


圖4

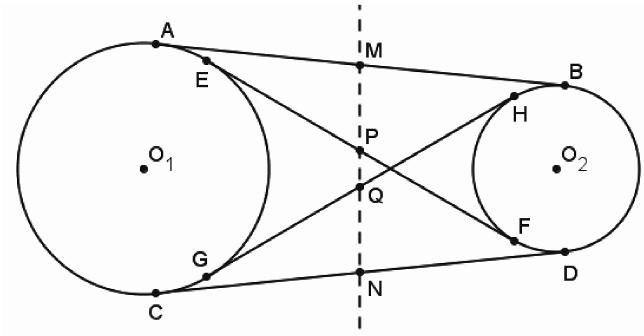


圖5

（d）若兩圓同心，即 O_1，O_2 重疊，不妨設爲 O，於是

$$PO^2 - R_1^{\ 2} = PO^2 - R_2^{\ 2}$$

$$R_1 = R_2$$

兩圓重疊，因此根軸不存在.

（e）若兩圓內含且不同心，可由（2）的結論得到，下面我們來證明（2）.

（2）對於三圓 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$，若 $\odot_1$、$\odot O_2$ 的根軸與 $\odot O_2$、$\odot O_3$ 的根軸交於點 P，則點 P 關於 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 都等冪，所以 $\odot O_1$、$\odot O_3$ 的根軸必過點 P. 由此說明了三根軸有可能相交於同一點.

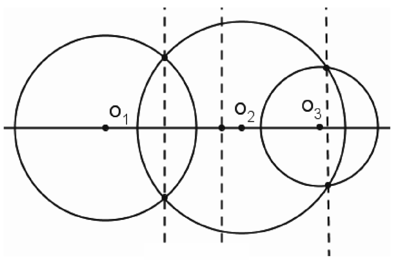


圖6

若 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的根軸與 $\odot O_2$、$\odot O_3$ 的根軸平行，則 $\odot O_1$ 和 $\odot O_3$ 的根軸也和此二根軸平行. 若不平行，由上結論知，三根軸必交於同一點，矛盾. 由此說明了三根軸有可能互相平行.

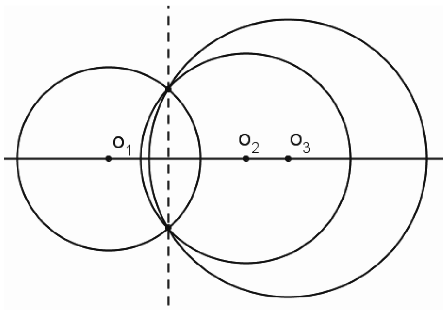


圖7

若 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的根軸與 $\odot O_2$、$\odot O_3$ 的根軸重合，則根軸上任意一點關於 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 都等冪，因此該根軸也是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_3$ 的根軸. 由此說明了三根軸有可能完全重合.

故不同心的三個圓兩兩的根軸或相交於一點、或互相平行、或完全重合.

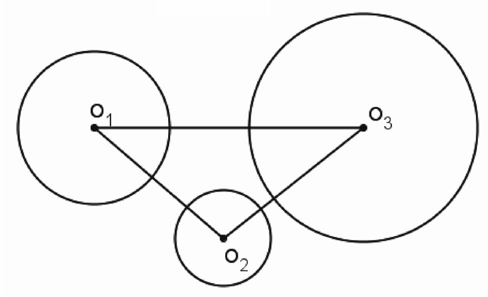


圖8

（a）當三圓的圓心共線時（見圖 6），$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的根軸垂直於 O_1O_2，$\odot O_2$ 和 $\odot O_3$ 的根軸垂直於 O_2O_3，$\odot O_1$ 和 $\odot O_3$ 的根軸垂直於 O_1O_3，而 O_1、O_2、O_3 三點共線，由此證得三根軸平行.

當三圓的圓心共線且公共弦相同時,根軸完全重合(如圖7). 事實上兩圓相交,其根軸爲公共弦所在的直線,而三圓的公共弦重合,因此三根軸重合.

(b) 當三個圓的圓心不共線時(見圖8),每兩個圓對應的根軸分別垂直於 O_1O_2、O_2O_3、O_3O_1,易知根軸都互不平行,由前面結論知,它們必相交於一點(此點實際上是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的內心).

(c) 當三個圓兩兩相交時,三個圓的圓心不共線,而三公共弦所在直線爲根軸,由上面的結論知,它們必交於一點.

至此,根軸定理得到了完整的證明.

現在,我們想把上述根軸定理中的圓推廣到點圓的情況. 我們先從解析幾何的角度研究點圓. 設兩圓的方程分別爲 $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1{}^2$ 和 $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2{}^2$. 若 $r_1=0$ 或 $r_2=0$,則圓爲點圓.

設平面上有一點 $P(x_0,y_0)$,該點關於兩圓等冪,則

$$(x_0-a_1)^2+(y_0-b_1)^2-r_1{}^2=(x_0-a_2)^2+(y_0-b_2)^2-r_2{}^2.$$

由此可見,根軸所對應的直線方程不外乎是把兩圓的方程相減.

若設兩圓的方程爲 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$,則根軸方程爲

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0\ .$$

因此,在幾何上所得到的根軸定理同樣可推廣到點圓的情況. 接著,我們從幾何的角度研究點圓在根軸定理中套用時所產生的各種變化.

若兩圓都是點圓,易知兩點圓只有外離的情況. 對於兩點圓的等冪點 P,我們有 $PO_1{}^2-0^2=PO_2{}^2-0^2$,即 $PO_1=PO_2$. 也就是說,**兩點圓的根軸就是兩點間之線段的垂直平分線**,符合根軸定理的(1).

接著,我們設 $\odot O_1$ 爲半徑大於0的圓、$\odot O_2$ 爲點圓,以下對根軸定理的命題逐一研究.

(1) 要證根軸與連心線垂直,事實上在原證明中,只需令 $R_1=0$ 即可,過程保持不變,由此得到 $CM=\dfrac{R_1{}^2}{2O_1O_2}$. 命題對點圓也成立.

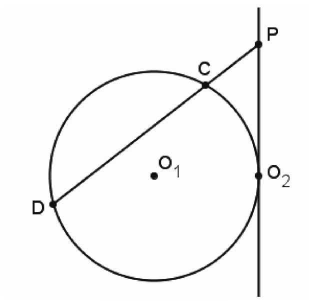


圖9

(a) 兩圓不存在相交的情況.

(b) 若兩圓相切,也就是說 O_2 在 $\odot O_1$ 上(見圖9),我們有 $PO_2{}^2=PC\cdot PD$. 因此根軸就是切線 PO_2. 命題對點圓也成立.

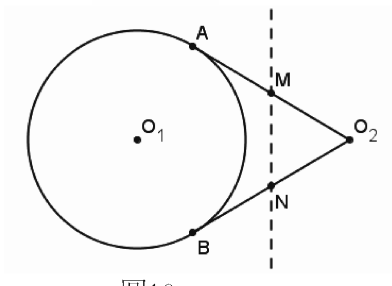


圖10

(c) 若兩圓外離,也就是說 O_2 在 $\odot O_1$ 外,四條公切線退化爲兩條切線. 過 O_2 作 $\odot O_1$ 的兩條切線(見圖10). 易知兩切線長中點的連線就是根軸,因爲 $MA^2=MO_2{}^2$,

$NB^2 = NO_2{}^2$.

（d）若兩圓內含且同心，即 O_2 和 O_1 重疊，此時 $PO_1{}^2 - R_1{}^2 = PO_2{}^2$，則 $R_1 = 0$，這是不可能的. 因此不存在此情況.

（e）若兩圓內含且不同心，任意作一圓 $\odot O_3$ 過點 O_2，其中 O_1、O_2、O_3 三點不共線，則 $\odot O_1$ 和 $\odot O_3$ 的公共弦和 $\odot O_3$ 在 O_2 上的切線交於一點. 同理再作另一交點，此兩交點連線所在的直線就是根軸. 此命題可由(2)的結論得到，而事實上把圓變爲點圓並不會對(2)的證明造成影響，因此(2)的成立也是顯然易見的.

綜合上述，根軸定理同樣適用於點圓的情況.

根軸定理常用於解決高難度的幾何問題，其中最常見的是用於證明三點共線和及線段相等的問題. 倘若我們只考慮半徑大於 0 的圓，那麼要使根軸定理有效，必須確保幾何圖形中至少有兩個圓. 但是，我們所遇到的幾何問題往往只有獨一無二的一個圓，這使得根軸定理被人所遺忘. 現在，我們證明了點圓在根軸定理中的適用性，那麼當面對只有一個圓的幾何圖形時，我們不禁會聯想到根軸定理. 因爲幾何圖形中有很多點，這些點都可以構成點圓，再結合圖中所給定的半徑大於 0 的圓，你也許瞬間感到眼花了亂. 倒不是因爲根軸定理無用武之地了，而是其使用的可能性多如繁瑣，只要細心研究，往往就會思考出一個嶄新的解題方法. 爲把大家帶入點圓的應用境界，我們先看一道使用圓冪定理證明的簡單幾何問題，以此給出證題的一般技巧.

〔**例 1**〕如圖 11，從半圓上的一點 C 向直徑 AB 引垂線，設垂足爲 D，作 $\odot O_1$ 分別切 BC 弧、CD、DB 於點 E、F、G，求證：$AC = AG$.

〔**探索**〕我們使用圓冪定理證明此題. AG 是 $\odot O_1$ 的切線，AG^2 就是 A 對 $\odot O_1$ 的冪，由此問題轉化爲證明 $AC^2 = AG^2$.

〔**證明**〕連結 O_1F、O_1G，易知 O、O_1、E 三點共線. 連結 OO_1、O_1E，連結 AF、FE，連結 CE.

$\because O_1E$、O_1F 是半徑，$\therefore \angle O_1EF = \angle O_1FE$.

同理 $\angle OEA = \angle OAE \quad \therefore \angle O_1FE = \angle OAE$

$\therefore A$、F、E 三點共線.

由圓冪定理可得 $AG^2 = AF \cdot AE$，我們只需證明 $AC^2 = AF \cdot AE$，亦即證明 $\triangle ACF \sim \triangle AEC$.

$\because CD \perp AB \quad \therefore \angle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

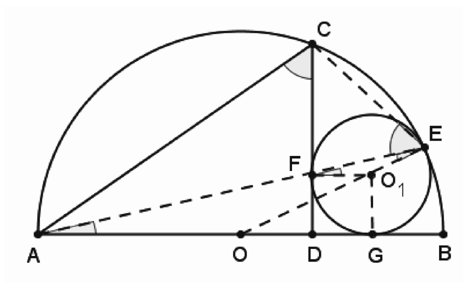


圖11

又 $\because \angle AEC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\therefore \angle ACD = \angle AEC \quad \therefore \triangle ACF \sim \triangle AEC$.

命題得證.

通過上一例題，我們發現要證兩線段 $a = b$，我們只需證明 $a^2 = b^2$，再把 a^2 和 b^2 轉化爲點關於圓的冪. 下面我們再看兩道例題.

〔**例 2**〕如圖 12，兩圓 Γ_1、Γ_2 外離，它們的一條外公切線 Γ_1、Γ_2 分別切於點 A、B，一條內

公切線與 Γ_1、Γ_2 分別切於點 C、D,設 E 是 AC 與 BD 的交點,F 是 Γ_1 上一點,過 F 作 Γ_1 的切線與線段 EF 的中垂線交於點 M,過 M 作 MG 切 Γ_2 於點 G. 求證:$MF = MG$.(2015 中國女子數學奧林匹克,深圳)

〔**探索**〕要證 $MF = MG$,即證 $MF^2 = MG^2$,也就是說 M 關於圓 Γ_1 和圓 Γ_2 等冪,亦即證明 M 在圓 Γ_1 和圓 Γ_2 的根軸上. 由根軸定理,圓 Γ_1 和圓 Γ_2 的根軸是外公切線長 AB 中點和內公切線長 CD 中點連線所在的直線,設中點分別爲 P、Q,我們只需證明 P、Q、M 三點共線.

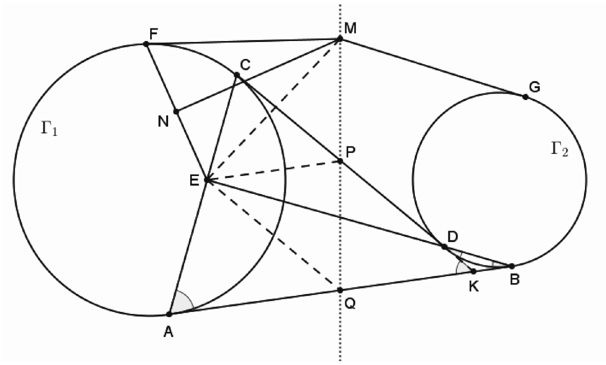


圖12

要證 P、Q、M 三點共線並不容易,其中一個較難使用的條件是中垂線. 注意到 $ME = MF$,即 $ME^2 = MF^2$,由結論知,也就是要證明 M 關於圓 Γ_1、圓 Γ_2、點圓 N 等冪,這讓我們猜想到直線 PQ 有可能是圓 Γ_1、圓 Γ_2、點圓 N 完全重合的三條根軸. 這正是解決此題的關鍵所在. 另一個需要發現的性質是 $BE \perp AC$,這並不難得到證明.

〔**證明**〕延長 CD 交 AB 於 K,設 AB 的中點爲 Q,CD 的中點爲 P,連結 PE、QE. 連結 ME,設 EF 的中垂線與 EF 交於點 N.

設 $\angle DBK = \alpha$,則 $\angle BDK = \alpha$, $\angle DKA = 2\alpha$.

$\because AK$、CK 是 Γ_1 的切線　$\therefore \angle CAK = \angle ACK$.

$\therefore \angle CAK = (180° - 2\alpha) \div 2 = 90° - \alpha$.

$\therefore \angle AEB = 180° - \angle CAK - \angle DBK = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°$.

即 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CED$ 爲直角三角形.

$\because P$、Q 分別爲 CD,AB 的中點　$\therefore PC = PD = PE, QA = QB = QE$.

$\therefore PC^2 = PD^2 = PE^2, QA^2 = QB^2 = QE^2$.

$\therefore P$、Q 關於圓 Γ_1、圓 Γ_2、點圓 E 等冪.

由根軸定理知,三個圓的根軸或相交於一點、或相互平行、或完全重合,而 P、Q 兩點關於三圓等冪,因此三圓的三根軸重合爲直線 PQ.

$\because MN$ 直線是 EF 的中垂線　$\therefore ME = MF$　$\therefore ME^2 = MF^2$.

$\therefore M$ 關於圓 Γ_1、點圓 E 等冪.

又 $\because$ 三圓的三根軸重合爲 PQ　$\therefore M$ 在根軸 PQ 上.

$\therefore M$ 關於圓 Γ_1 和圓 Γ_2 等冪, $\therefore MF^2 = MG^2$, 即 $MF = MG$.

〔**例3**〕已知 $\triangle ABC$ 的內切圓分別與邊 AB、AC 切於點 Z、Y,BY 與 CZ 交於點 G,點 R、S 分別滿足四邊形 $BCYR$ 和四邊形 $BCSZ$ 是平行四邊形. 證明:$GR = GS$.

〔**探索**〕要證 $GR = GS$,即證 $GR^2 = GS^2$,也就是說 G 關於點圓 R 和點圓 S 等冪. 兩個點圓無法有效地使用根軸定理,我們需要第三個圓的介入,不難發現該圓就是 $\triangle ABC$ 的旁切

圓 I_A. 引入了第三個圓後, G 變爲根心, BY 和 CZ 變爲根軸, 問題迎刃而解.

〔**證明**〕如圖13所示,作 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上的旁切圓 I_A,分別切 BC、AB 延長線、AC 延長線於 D、E、F. 爲方便表示,由內切圓性質,不妨設 $AY = AZ = a, BZ = BX = b, CX = CY = c$. 再由旁切圓的性質,可得 $BD = BE = c, CD = CF = b$.

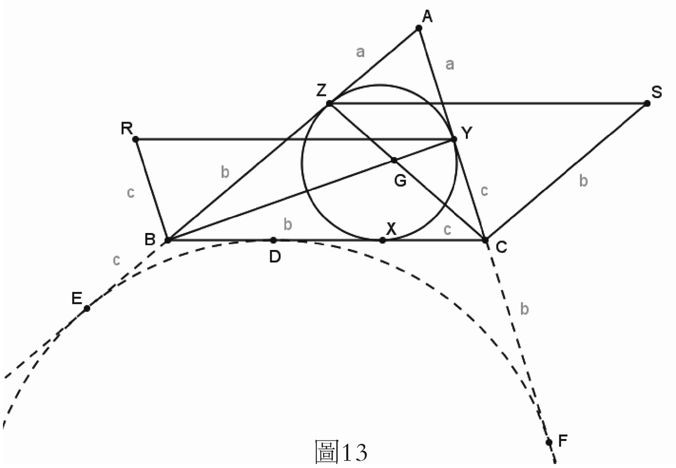


圖13

$\because$ 四邊形 $BCYR$ 和四邊形 $BCSZ$ 是平行四邊形. $\therefore BR = CY = c, YR = BC = b + c, YF = YC + CF = b + c, CS = BZ = b, ZS = BC = b + c, ZE = ZB + BE = b + c$.

$\because BR^2 = BE^2 = c^2, YR^2 = YF^2 = (b + c)^2, CS^2 = CF^2 = b^2, ZS^2 = ZE^2 = (b + c)^2$.

$\therefore B$、Y 關於點圓 R 和旁切圓 IA 等冪, C、Z 關於點圓 S 和旁切圓 IA 等冪.

由根軸定理知, BY 是點圓 R 和旁切圓 I_A 的根軸, CZ 是點圓 S 和旁切圓 I_A 的根軸.

又 $\because BY$ 和 CZ 相交於點 G, $\therefore G$ 是點圓 R、點圓 S、旁切圓 I_A 的根心.

$\therefore G$ 關於點圓 R 和點圓 S 等冪, $\therefore GR_2 = GS_2$,即 $GR = GS$.

最後,我們再看一道證明三點共線的問題,此題給難度較大的幾何問題提供了簡潔快捷的證明,這正是點圓在根軸定理中存在的價值.

〔**例 4**〕如圖 14,設三角形 ABC 是一個不等邊三角形, I 是內心, ω 是它的外接圓, AI、BI、CI 分別交 ω 於 D、E、F,過點 I 且與直線 BC 平行的直線交直線 FE 於點 K,同理得到 L、M. 證明: K、L、M 三點共線. (2015 年巴爾干地區數學奧林匹克)

〔**探索**〕要證三點共線,只需證明 K、L、M 三點都在某兩個圓的根軸上即可. 注意到,圖中只有一個圓而不是兩個圓,這讓我們直接使用根軸定理時遇到困難. 這時,我們可以把點看成點圓,讓點變爲圖中的" 第二個圓". 問題立刻得到簡潔的解法.

〔**證明**〕$\because B, C, E, F$ 四點共圓,

$\therefore \angle IFE = \angle IBC$.

又 $\because IK /\!/ BC$, $\therefore \angle IBC = \angle EIK$.

$\therefore \angle IFE = \angle EIK$, $\therefore \triangle EIK \backsim \triangle IFK$.

$\therefore KI^2 = KE \cdot KF$.

同理 $LI^2 = LD \cdot LF, MI^2 = ME \cdot MD$.

$\because KI^2 = KE \cdot KF$, $\therefore K$ 對點圓 I 和 ω 等冪.

同理 L、M 對點圓 I 和 ω 等冪.

$\therefore$ K、L、M 在點圓 I 和 ω 的根軸上.

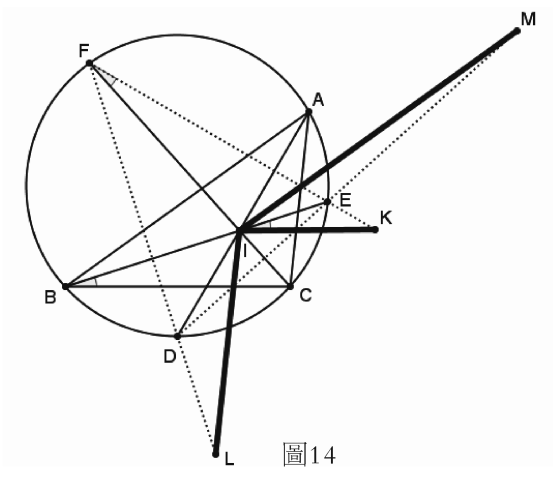


圖14

由根軸定理知,K,L,M 三點共線.

通過以上例題,你是否感受到半徑爲 0 的"點圓" 竟然有如此神通廣大的作用呢?事實上,生活中很多微不足道的東西往往是解決整個事件的鑰匙,這需要我們多進行思考、多進行類比以及多推廣. 平面幾何的解題亦是如此.

搬動無限遠直綫

李祥立

在(平面)射影幾何中,我們接納**無限遠直綫**,並假定

- 每一直綫有一無限遠點;
- 相互平行的直綫具有相同的無限遠點;
- 所有無限遠點都在無限遠直綫上.

無限遠直綫的齊次坐標方程爲 $x_3=0$,它沒有非齊次坐標方程,因而在一般笛卡兒坐標係中,無限遠直綫是看不見的,但在適當的射影變換下,可使其圖形可見.

在射影幾何中,對於無限遠直綫與圓錐曲綫的一些關係(如:雙曲綫與無限遠直綫相交於兩點,抛物綫與無限遠直綫相切等),雖然可證明如下:

設非退化圓錐曲綫 Γ 之方程爲

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0. \qquad (1)$$

過點 (x_0,y_0) 之任一直綫 L,參數方程可表爲

$$x=x_0+r\cos\theta,\quad y=y_0+r\sin\theta. \qquad (2)$$

將(2)代入(1),即求 Γ 與 L 之交點,得 $Kr^2+2Mr+N=0$,其中 $M=(ax_0+hy_0+g)\cos\theta+(hx_0+by_0+f)\sin\theta$.

若 $\begin{pmatrix}ax_0+hy_0+g\\hx_0+by_0+f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 對任何 θ 皆成立,即 (x_0,y_0) 滿足聯立方程組 $\begin{pmatrix}ax+by+g\\hx+by+f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,則點 (x_0,y_0) 稱爲 Γ 之**對稱中心**(此時,$M=0$,解得兩 r 之絕對值相等,符號相反).

若 $\begin{vmatrix}a&h\\h&b\end{vmatrix}=0$,即直綫 $ax+hy+g=0$ 與直綫 $hx+by+f=0$ 平行(此因:若 $ax+hy+g=0$ 與 $hx+by+f=0$ 表同一直綫,則 $\begin{vmatrix}a&h&g\\h&b&f\\g&f&c\end{vmatrix}=0$,即(1)爲退化圓錐曲綫,與已知條件不符),即點 (x_0,y_0) 在無限遠直綫上,此時,(1)爲抛物綫,故抛物綫之對稱中心在無限遠直綫上,我們一般謂其無對稱中心.

點 (x_0,y_0) 不在無限遠直綫上(即直綫 $ax+hy+g=0$ 與直綫 $hx+by+f=0$ 不平行)

之充要條件爲 $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \neq 0$,即 $ah - h^2 \neq 0$,此時,(1) 爲橢圓或雙曲綫,故橢圓和雙曲綫都有對稱中心.

Γ 之齊次方程爲 $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2hx_1x_2 + 2gx_1x_3 + 2fx_2x_3 = 0$,其與無限遠直綫 $x_3 = 0$ 之交點滿足 $ax_1^2 + bx_2^2 + 2hx_1x_2 = 0$,即 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$,

① 若 $ab - h^2 = 0$,兩交點重合,即當 Γ 爲拋物綫時,它與無限遠直綫相切(當 $h = a = b = 0$ 時,Γ 退化爲無限遠直綫與直綫 $2gx + 2fy + c = 0$ 的聯集).

② 若 $ab - h^2 > 0$,無實的交點,即當 Γ 爲橢圓時,它與無限遠直綫無交點.

③ 若 $ab - h^2 < 0$,有兩相異的交點,即當 Γ 爲雙曲綫時,它與無限遠直綫有2個相異的交點.

又 $K = acos^2\theta + bsin^2\theta + 2hcos\theta sin\theta = (bm^2 + 2hm + a)cos^2\theta$,其中 $m = tan\theta$.

若 L 與 Γ 之兩交點在無限遠處,則(2) 爲**漸近綫**,因 $K + \frac{2M}{r} + \frac{N}{r^2} = 0$,當 $|r| \to + \infty$ 時,得 $K = 0$,即

$$bm^2 + 2hm + a = 0. \qquad (3)$$

判別式 $\delta = 4h^2 - 4ab = 4(h^2 - ab)$,僅當 $ab - h^2 < 0$ 時有兩相異實根,故僅雙曲綫有兩條實的漸近綫.

由(3) 解得 $m = \frac{-2h \pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{2b} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{b}$,則漸近綫方程爲 $y - y_0 = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{b}(x - x_0)$.

但在一般笛卡兒坐標係中,因我們看不見無限遠直綫,上述證明無法給予讀者一個圖像,以顯示 是怎麼樣與無限遠直綫相交或相切的. 筆者試用射影變換,以搬動無限遠直綫至可見的位置,使其與圓錐曲綫之關係清晰可見. 舉實例闡明於下:

下圖(圖 1) 中容易看出:直綫 $2x + 4y = 1$(齊次坐標方程爲 $2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$) 與橢圓 $x^2 + 2y^2 = 1$(齊次坐標方程爲 $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 = 0$) 有 2 個交點,直綫 $x - 1 = 0$(齊次坐標方程爲 $x_{\_}\ x_3 = 0$) 與橢圓 $x^2 + 2y^2 = 1$ 相切,直綫 $x - 2 = 0$(齊次坐標方程爲 $x_1 - 2x_3 = 0$) 與橢圓 $x^2 + 2y^2 = 1$ 無交點.

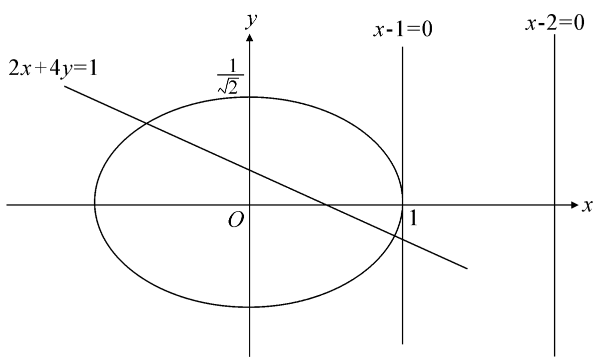


圖1

今作射影變換,以變動無限遠直綫,如欲

(一) 將無限遠直綫變動至 $2x+4y=1$,可作變換

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1+4x_2-x_3 \end{pmatrix},$$

則 $x_3=2x_1'+4x_2'-x_3'$, 此時橢圓 $x_1^2+2x_2^2-x_3^2=0$ 之方程變成

$$x_1'^2+2x_2'^2-(2x_1'+4x_2'-x_3')^2=0,$$

化簡,得 $3x_1'^2+16x_2'x_2'+14x_2'^2-4x_1'x_3'-8x_2'x_3'+x_3'^2=0$,

即 $3x'^2+16x'y'+14y'^2-4x'-8y'+1=0$,圖形爲雙曲綫.

這可以解讀爲:若無限遠直綫 L_∞ 的方程爲 $2x+4y=1$ 而橢圓 Γ 的方程爲 $x^2+2y^2=1$ 時,L_∞ 與 Γ 有 2 交點,但當我們將 L_∞ 拉到極遠處(即變換回我們習慣面對的情況時),亦即 L_∞ 之方程爲 $x_3'=0$(圖形看不見) 時,Γ 當然也被一並牽動,其方程會變成 $3x'^2+16x'y'+14y'^2-4x'-8y'+1=0$,圖形爲雙曲綫,我們可據此想象,在我們看不見之遠處,雙曲綫是呈現橢圓的形態而與無限遠直綫有兩相異交點的(射影變換不會改變相交或相切的狀態).

(二) 將無限遠直綫變動至 ,可作變換

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix},$$

則 $x_3=x_1'-x_3'$, 此時橢圓 $x_1^2+2x_2^2-x_3^2=0$ 之方程變成

$$x_1'^2+2x_2'^2-(x_1'-x_3')^2=0,$$

化簡,得 $2x_2'^2+2x_1'x_3'-x_3'^2=0$,

即 $2y'^2+2x'-1=0$,圖形爲抛物綫.

這可以解讀爲:若無限遠直綫 L_∞ 的方程爲 $x-1=0$ 而橢圓 Γ 的方程爲 $x^2+2y^2=1$ 時,L_∞ 與 Γ 相切,但當我們將 L_∞ 變換回我們習慣面對的情況時,即 L_∞ 之方程爲 $x_3'=0$(圖形看不見) 時,Γ 的方程變成 $2y'2+2x'-1=0$,圖形爲抛物綫,我們可據此想象,在我們看不見之遠處,抛物綫是呈現橢圓的形態而與無限遠直綫相切的.

(三) 將無限遠直綫變動至 $x-2=0$,可作變換

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1-2x_3 \end{pmatrix},$$

則 $x_3=\frac{1}{2}x_1'-\frac{1}{2}x_3'$, 此時橢圓 $x_1^2+2x_2^2-x_3^2=0$ 之方程變成

$$x_1'^2+2x_2'^2-\frac{1}{4}(x_1'-x_3')^2=0,$$

化簡,得 $3x_1'^2+8x_2'^2+2x_1'x_3'-x_3'^2=0$,

即 $3x'^2+8y'2+2x'-1=0$,圖形為橢圓.

這可以解讀為:若無限遠直綫 L_∞ 的方程為 $x-2=0$ 而橢圓 Γ 的方程為 $x^2+2y^2=1$ 時,L_∞ 與 Γ 無交點,但當我們將 L_∞ 變換回我們習慣面對的情況時,即 L_∞ 之方程為 $x_1'=0$(圖形看不見)時,Γ 的方程變成 $3x'^2+8y'2+2x'-1=0$,圖形仍為橢圓,我們可據此想象,在我們看不見之遠處,橢圓仍是呈橢圓的形態而與無限遠直綫無交點.

由上述討論,可知圓錐曲綫與無限遠直綫之關係可想象如下圖(圖2)所示(留意:原圓錐曲綫的對稱中心是無限遠直綫對原圓錐曲綫之極,而極與極綫之關係在射影變換下是保持不變的).

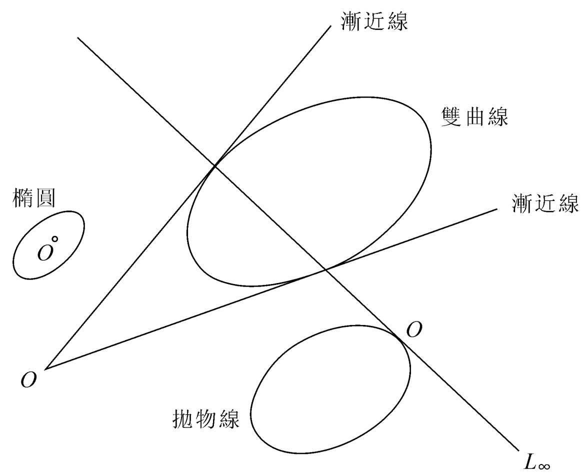


圖2

上例是以橢圓作基準去構思搬動無限遠直綫,為何我們不用拋物綫或雙曲綫作基準?此因原先對於拋物綫或雙曲綫之圖形,我們未能得窺其全貌也.

[注] 李祥立係澳門培正中學的原校長.

有趣的格子乘法

香港教育學院數學及資訊科技學係　文耀光博士

引言

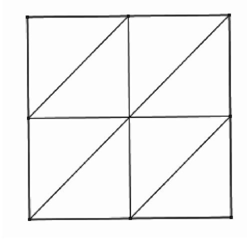
“格子乘法”(*Lattice Multiplication*),又名“百葉窗法”(*Gelosia Method*),是一種原先在古印度盛行的乘法,後來在 13 至 14 世紀左右經由阿拉伯人傳入歐洲,漸漸被歐洲人采用,并且流行了幾個世紀. 至於在中國古代,有關這種乘法的記載,亦可以在典籍中找到它的踪影. 例如,在明代數學家吳敬所著的《九章演算法比類大全》(1450) 中,就記載過這種乘法,稱之爲“寫算”. 到了明朝末年,數學家程大位在其著作《演算法統宗》(1592) 中,亦介紹過這種有趣的乘法,因其圖形有如織錦,程大位把它稱爲“鋪地錦”. 從此,這種乘法便以“鋪地錦” 這個名稱在中國流行. 直到清朝, 我們仍然可以在小說家李汝珍的作品《鏡花緣》(1818) 中,找得到有關“鋪地錦” 的記載,可謂流傳久遠.

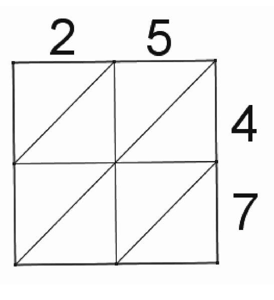
究竟“格子乘法” 或“鋪地錦” 是怎樣進行的呢?我們可以參考以下的例子.

有趣的格子乘法

〔**例一**〕$25 \times 47 = ?$

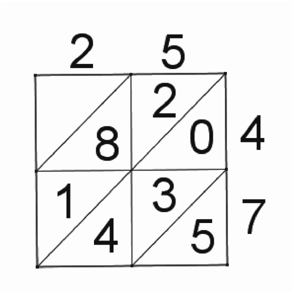
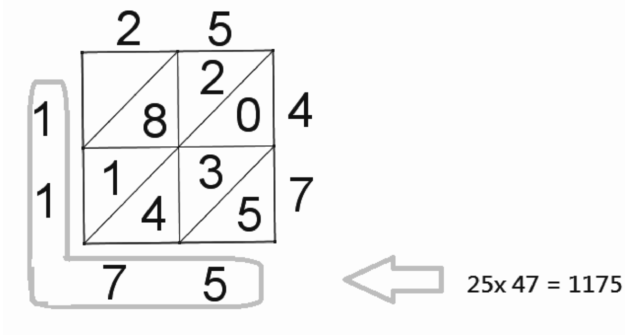
〔**解**〕首先,畫一個 2×2 的方框,令它的行數和列數跟被乘數和乘數的位數對應,並在每個小方格內上加上斜線.





然後,在方框外的上方和右方分別寫上被乘數和乘數.

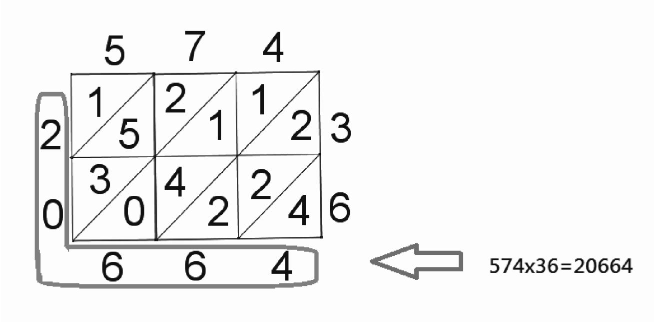
接著,把它們的各個位數分別相乘,把它們的積寫進小格子內,其中積的個位寫在斜線的右下方,而積的十位寫在斜線的左上方. 例如,$5 \times 4 = 20$,積的個位“0” 會寫在小方格中斜線的右下方,而積的十位“2” 寫在斜線的左上方(見下左圖).

之後,由右至左,把斜線之間的數字相加. 如果相加滿10,便向前進1. 最後,把所得的答案寫在方框外,便是 25 × 47 的積,即 1175(見上右圖).

〔**例二**〕574 × 36 ＝ ?

〔**解**〕先畫一個 3 × 2 的方框,並在每個小方格內上加上斜線. 然後,按上例所描述的步驟,將被乘數與乘數的各個位數分別相乘,將它們的積寫進小格子內. 最後,由右至左,把斜線之間的數字相加,所得結果便是 574 × 36 的積,即 20664.



結語

“格子乘法” 是一種古代乘法,現時香港的小學數學課本一般都沒有介紹. 所以經由本文的介紹,希望讓同學可以認識多一種乘法,開闊大家對乘法運算的視野. 另外,亦希望透過對“格子乘法” 的簡介,讓同學能夠在學習數學課本的數學之餘,可以增加一點數學史的認識,提高學習數學的興趣,以及欣賞古人解決數學問題的方法.

參考書目

彭若青,彭廣愷(譯)(2006),《數學遊記》,臺北:河中文化實業有限公司.

Elizabeth Boag (2007), Lattice Multiplication, BSHM Bulletin, vol. 22, p. 182.

2016“希望杯”全國數學邀請賽（中學第二十七屆）
報名人數統計表

學校名稱	初一	初二	初三	高一	高二	合計
澳門大學附屬應用學校＊	4	4	4	0	0	12
培華中學＊	5	5	10	5	20	45
聖保祿學校＊	33	32	35	30	0	130
粵華中學＊	30	30	30	30	30	150
菜農子弟學校＊	30	30	30	30	30	150
氹仔坊眾學校(中學部)＊	20	15	20	20	20	95
鏡平學校＊	50	50	50	45	30	225
培正中學＊	54	71	44	123	110	402
澳門坊眾學校＊	20	20	20	20	20	100
陳瑞祺永援中學＊	10	9	8	15	0	42
培道中學＊	50	50	50	50	50	250
聖公會(澳門)蔡高中學＊	25	25	25	0	0	75
教業中學＊	15	10	15	10	15	65
濠江中學＊	38	42	55	71	44	250
同善堂中學＊	20	20	20	20	20	100
勞工子弟學校＊	60	60	60	60	60	300
高美士中葡中學＊	10	11	10	15	16	62
浸信中學＊	30	30	30	30	30	150
廣大中學＊	81	0	0	0	7	88
新華學校＊	11	16	0	0	0	27
聖若瑟教區中學(第？校)	0	0	30	30	30	90
濠江中學附屬英才學校	20	20	0	0	0	0
東南學校(中學部)	6	13	15	17	21	72
鄭觀應公立學校	4	0	0	0	0	4
合計	626	563	561	621	553	2924

2016“希望杯”全國數學邀請賽（小學第十四屆）
報名人數統計表

學校名稱	小四	小五	小六	合計
濠江中學附屬英才學校	30	30	20	80
培道中學（小學部）	32	32	16	80
教業中學分校	20	20	30	70
菜農子弟學校	60	50	50	160
氹仔坊眾學校	8	12	8	28
鏡平學校（小學部）	40	40	40	120
培正中學（小學部）*	82	70	65	217
聖若瑟教區中學第五校	16	16	16	48
澳門坊眾學校（小學部）*	16	16	16	48
陳瑞祺永援中學 *	15	15	0	30
慈幼中學 *	12	12	12	36
濠江中學附屬小學 *	90	90	90	270
同善堂中學（小學部）	25	25	20	70
勞工子弟學校（小學部）*	40	40	40	120
澳門浸信中學（小學部）*	7	10	10	27
澳門大學附屬應用學校 *	20	20	20	60
培華中學附小	8	8	0	16
鄭觀應公立學校	1	2	0	3
婦聯學校	2	2	2	6
聖公會(澳門)蔡高中學	20	0	0	20
合計	544	510	455	1509

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A

電話:853 - 28965253,853 - 66878553 傳眞:853 - 28788259

E - mail: macaumath@ yahoo. com. hk , inwmacau@ yahoo. com. hk

Website:http://www. mathsmo. com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日　在氹仔海島公證署辦理本會注冊手續。

2003 年

6 月 7 日　舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會。

12 月 13、14 日　舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課。

12 月　《澳門數學教育》創刊號出版。

2004 年

4 月 17 日　舉辦“DM_Lab 和動態數學教學”講座。

9 月 30 日　赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學。

10 月 9、10 日　舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課。

2005 年

3 月 24 - 28 日　赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。

4 月 16 日　與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會。

11 月 26、27 日　舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課。

12 月 20 - 28 日　前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

2006 年

3 月 4 日　舉辦“因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會。

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課。
6 月 25－29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。
12 月 9－10 日　舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”。

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”。
7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學：一個國際視角”及“有效數學教學實務：美國的經驗”講座。
7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。
9 月 1 日　舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座。

2008 年

11 月 1 日　舉辦“小學數學專家講座”。
11 月 22 日　舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議。

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽（ARML），榮獲國際組第一名。
8 月 15 日～20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中。
11 月 14 日　舉辦“數學教學的有效性與開放性” 研討大會及示範課。
12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學” 評比大會。
（慶祝祖國成立 60 週年，澳門回歸 10 週年，本會成立 5 週年活動）

2010 年

6 月　成立“澳門數學奧林匹克學會”，政府憲報刊登該會章程。
11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。
1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。
9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”。

2012 年

6 月 9 日　　舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課。

8 月 1 – 6 日　　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。

11 月 3 – 4 日　　舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”。

11 月 3 日晚上　　舉行慶祝本會成立十週年晚宴,十週年成果展。

2013 年

4 月 6 日　　舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽。

4 月 14 日　　進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 16 日　　名譽會長陳明金先生宴請本會,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。

5 月 11 日　　舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”。

6 月 1 日　　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽。

5 月 31、6 月 1 日　前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 15 – 19 日　　舉辦數學實驗——統計與概率工作坊。

7 月 10 日　　澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。

7 月 18 日　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 1 – 7 日　　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流。

11 月 16 – 17 日　　與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會。

12 月 7 – 9 日　　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級證書培訓班」。

12 月　　《澳門數學教育》第十一期出版。

2014 年

1 月 11 日　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會。

4 月 3 日　　拜訪澳門基金會。

4 月 13 日　　進行中學第二十五屆、小學第十二屆"希望杯"澳門地區第二試決賽。

4 月 15 日　　拜訪澳門教育暨青年局。

4 月 17 日至 21 日　赴臺灣澎湖、高雄參訪活動。

4 月 26 日　　舉辦 “史豐收速算法”介紹會。

5 月 30 – 31 日　　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 14 日　　舉行「領道數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動。

7 月 11 日　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班。

7 月 12 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級證書頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
8 月 10－16 日	派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團。
10 月 18 日	舉辦"熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課"。
11 月 22－23、29－30 日	舉辦“史豐收速算法”道師培訓班。
12 月 6 日、7 日	舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽(澳門賽區)。
12 月	《澳門數學教育》第十二期出版。

2015 年

1 月 16 日	拜訪澳門基金會,獲澳門基金會行政委員會何桂玲委員、資助暨合作廳廳長黃棣樂等人接見,讚揚本會積極推動和發展本澳中小學的數學教育。
1 月 31 日	於培道中學舉行成立“史豐收速算法”培訓基地新聞發佈會,由史豐收速算法推廣中心主任史豐寶帶領小朋友作現場示範。
4 月 12 日	於浸信中學進行中學第二十六屆、小學第十三屆“希望杯”全國數學邀請賽澳門地區第二試決賽。本澳共有 3902 名學生報名,其中中學 2990 人,小學 1212 人。
4 月 19 日	拜訪澳門教育暨青年局,獲黃健武廳長和黃逸恆處長接見,共同探討數學實驗室在本澳建立之可行性。
5 月 10 日	汪會長參加上海“小學數學教師教育高級研修班”。
5 月 23 日	於澳門濠江中學禮堂舉行「任勇的數學教學主張」講座,邀請廈門任勇教授來澳作一次經驗介紹講座。
5 月 28－31 日	前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽,邵敏老師帶領(濠江)羅一驊、(培正)黎卓林、(慈幼)吳子傑參賽,黎卓林同學獲優異獎及白金獎,成績位居前四十名,另兩位同學取得了白金獎,爲澳門學界爭光。
5 月 29－30 日	組織本澳 15 名數學優秀學生前往美國拉斯維加斯內華達大學拉斯維加斯校區(UNLV)參加第 40 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊領隊、教練汪甄南、施振雄、劉淑華、魏均僑、劉明藝,隊員包括(濠江)伍培全、譚詠霖、洪文浩、談皓、劉嘉德、袁浩軒、(教業)蕭浩樑、(鏡平)劉溢庭、(勞校)鄒嘉俊、謝廣博、樑淑瑩、(培正)黎宗樺、鄧子俊、鄧楚灝、周昊天。比賽完畢後,遊覽羚羊谷布來斯谷、包偉湖馬蹄灣和錫

安公園等景點。在 ARML 成立四十週年之際,澳門隊重獲冠軍,爲澳門學界爭光。

6 月 13 日	於濠江中學禮堂舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。澳門基金會資助暨合作廳黃棣樂廳長和教育暨青年局黃逸恆處長爲獲得者及其教練員頒發獎牌和證書。
6 月 3 – 7 日	澳門大學教育學院與本會合辦國際數學教育研究委員會第二十三屆國際小學數學教育"數學整數教育"專題研討會。
6 月 6 日	邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家於聖若瑟教區中學第二、三校禮堂舉行講座。 (1) 講者:意大利的幾何學家(Prof. Maria Giuseppina Bartikubu) 講題:意大利的幾何教學與捷克數學教育家 (2) 講者:捷克數學教育家(Prof. Jarmila Novotna) 講題:調查的方法和數學遊戲在捷克課堂
6 月 27 日	本會派隊(培道中學同學) 往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。
7 月 11 日	本會與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」於橫琴澳門大學劉少榮樓舉行。
8 月	出版昇大數學教程
8 月 8 – 12 日	汪會長和魏老師帶隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。
8 月 15 – 20 日	赴陝西省訪問陝西省教育廳,參觀半坡博物館、全國愛國主義教育基地習仲勛同志故居(富平縣) 及史豐收先生故居和生平展館(大荔縣) ,遊覽華山、大雁塔和明城牆等景點。
9 月	《兩岸三地昇大數學教程》出版。
10 月 17 日	於培道中學舉辦"幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課" ,邀請作中山市華星幼兒園教師及學生作演示課。
12 月 5 日、6 日	於濠江中學小學部禮堂舉辦"第一屆小學新思維數學"澳門杯"課堂教學大賽評比大會"。 進入決賽老師: 浸信中學小學部李煥棉老師,課題:小五〈分數和小數互化〉 協同特殊教育學校樑杏煊老師,課題:初一 A(三下)〈認識分數〉 氹仔坊眾學校呂杏妍老師,課題:P6A〈正比例(一)〉 濠江中學附屬小學潘錦柳老師,課題:小二〈 平均分〉 培正中學管淑賢/容穎享老師,課題:小五〈多邊形的周長〉 評委:方運加教授(首都師範大學數學係)、邱學華教授(嘗試教學理論研究會理事長)、林良富校長(浙江寧波萬裏國際學校)、江春

蓮教授(澳門大學教育學院助理教授)。

評選結果:

特別獎:協同特殊教育學校樑杏煊老師

特等獎:氹仔坊眾學校呂杏妍老師

一等獎:潘錦柳老師、管淑賢/容穎享老師、李煥棉老師

【教案比賽】的“教案獎”結果如下:

一等獎:培道中學樑嬋娟老師;浸信中學鄭鎂堅老師;

二等獎:濠江中學附屬小學林雯君、郭倩瑩,麥琪老師;明愛學校林麗燕老師;浸信中學小學部黃劍橋老師。

12 月 7 日　　本會獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。

12 月　　《澳門數學教育》第十三期出版。