澳門數學教育（第十一期） 2013 年 12 月

目 錄

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號:2877
地址:澳門南灣街 107 號
刊頭題詞:張奠宙教授
排版:廣源紙業文具行
印刷:文寶印務有限公司
刊號:ISSN 1814－2176

“南極論壇”首參與,“澳數學會”再揚威

澳門數學教育研究學會

由香港、紐約、日內瓦、巴黎等地精英人士參與發起的“南極論壇”於 2013 年 11 月 22 日至 12 月 2 日在南極舉行。來自全球各地的各行業領軍人物共 164 位代表在阿根廷的烏斯懷亞乘坐由首屈一指的法國郵輪公司龐洛精心打造的北冕號郵輪前往世界上最後一片淨土 —— 南極,參與這一史上首次在南極大陸舉辦的人文盛會,澳門數學教育研究學會會長汪甄南應邀參加了會議。

南極論壇的宗旨是“思考人類文明,關注地球環境,推進均衡發展,實現共同價值”。首屆南極論壇的主題是“共同利益和共同責任 —— 世界與中國未來 10 年”。參與這次南極論壇的包括外交、學術、經濟、金融、藝術和傳媒等不同領域的精英,論壇圍遶“地球、環境、人類、未來”等話題展開十幾場專題演講、對話和報告會。

本屆論壇從南極視頻連線美國哥倫比亞大學、國際自然保護聯盟、聯合國教科文組織等機構,實現多地互動,進行高端交流。作爲這次活動的具體成果,論壇參與者簽署了一份《南極論壇共同宣言》。

在對話社會發展方面,澳門數學教育研究學會會長汪甄南先生向有關代表介紹了澳門特別行政區崔世安特首在施政報告中所提到的“教育興澳”以及澳門在回歸祖國十三年來的教育發展所取得的豐碩成果,特別是澳門的中學生連續五年參加全美高中數學競賽(*ARML*)取得的優異成績,獲得了與會代表的一致認同與贊賞。

南極論壇是一個國際性的論壇,大家坐在一起共同探討今天的世界該怎麼辦,全世界無論大國還是小國都面臨很多問題。從這個意義上講,南極論壇也是致力於爲 21 世紀的人類尋找一個美好的未來的重要論壇。親眼目睹南極的冰拱門因爲全球變

暖而坍塌下來的人們,心靈會受到極大的震撼。在南極那樣的環境下,人們的思考發生了變化。

參加"南極論壇" 的代表都有一個共識,那就是:**有一種力量是我們必須敬畏的,那就是自然;有一種利益是超越國界緐民族的,那就是環境;有一種責任是全人類都不能推卸的,那就是消滅戰爭與維護和平。**

飽覽極地原生態之大美的同時,與國際精英一起領略極地探險、航海、歷史、人文、地理及氣候,自然生物在內的極地環境的同時,探訪中國長城站,並與國際權威專家、各行業領軍人物一同參與"南極論壇",共同探討極地環境變化對於人類未來的長遠影響。挑戰極限、回歸自然,讓壯美遼闊的南極爲澳門數學教育開拓更加廣闊的視野,讓綠色自然永遠與人們代代相伴,一起跟隨汪甄南先生的足跡感受南極之美,感悟天、地、人的和諧統一,展望澳門數學教育未來的美好遠景。

Steiner 定理之直接证法

李祥立

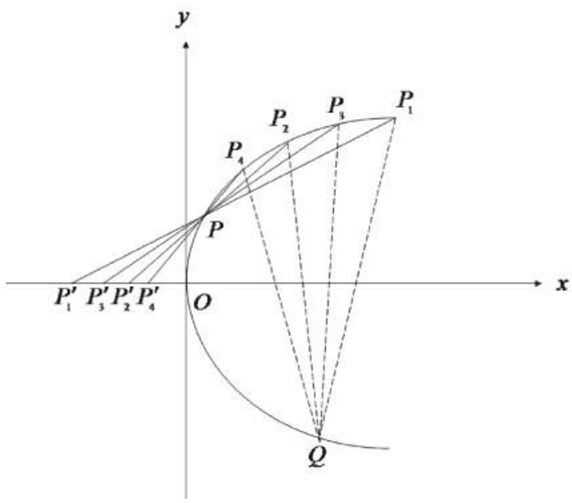
Steiner 定理在射影幾何中佔有很重要的位置. 此定理之推證,在古代,通常用這樣的一個間接方法:先就圓之情況證之,再用直圓錐面將圓投影至一般圓錐曲綫. 近代的射影幾何教本則多以此定理作爲二次曲綫之定義,故難以得見有直接證明. 筆者曾作多番探索,經過不斷努力,終於想出了直接證法如下:

Steiner 定理:設 P_1,P_2,P_3,P_3 為一非退化圓錐曲綫上的四個相異定點,P 為此圓錐曲綫上異於此四點的一個動點,則(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4) 是一個定值. [此即說:若 P,Q 爲此圓錐曲綫上異於此四點的任兩點,則(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4) = (QP_1,QP_2,QP_3,QP_4).] 又若 P_4T 爲此圓錐曲綫在 P_4 之切綫,則(P_4P_1,P_4P_2,P_4P_3,P_4T) = (QP_1,QP_2,QP_3,QP_4). [同理,若 P_3T 爲此圓錐曲綫在 P_3 之切綫,則(P_3P_1,P_3P_2,P_3T,P_3P_4) = (QP_1,QP_2,QP_3,QP_4),餘類推.]

〔證明〕(一) 對拋物綫而言,直接证法如下:

設此拋物綫之方程爲 $y^2 = 4cx$,其參數式可表爲 $x = ct^2$,$y = 2ct$(t 爲參數),

設 P,P_1,P_2,P_3,P_4 均爲此拋物綫上之點, 其坐標分別爲: (ct_0^2,$2ct_0$), (x_1,y_1), (x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4),其對應之 t 值爲 t_0,t_1,t_2,t_3,t_4,連 PP_i = (i = 1,2,3,4) 並延長之,設其與 x 軸之交點分別爲 P'_1,P'_2,P'_3,P'_4(留意:直綫 PP_i 不可能平行 x 軸,故必有交點),如右圖所示:



(ⅰ) 當直綫 PP_i 均不與 x 軸垂直時,

直綫 PP_i 之方程爲:$y - y_i = m_i(x - x_i)$,其中 $m_i = \dfrac{2ct_i - 2ct_0}{ct_i^2 - ct_0^2} = \dfrac{2}{t_i + t_0}$,($i$ = 1,2,3,4).

以 $y = 0$ 代入,解得 $x = x_i - y_i \cdot \dfrac{t_i + t_0}{2} = ct_i^2 - 2ct_i \cdot \dfrac{t_i + t_0}{2} = -ct_it_0$,

此即 P'_i 之横坐標(i = 1,2,3,4).

(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4) = (PP'_1,PP'_2,PP'_3,PP'_4)

$$= (P_1'P_2', P_3'P_4')$$

$$= \frac{-ct_3t_0-(-ct_1t_0)}{-ct_3t_0-(-ct_2t_0)} : \frac{-ct_4t_0-(-ct_1t_0)}{-ct_4t_0-(-ct_2t_0)}$$

$$= \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} : \frac{t_1-t_4}{t_2-t_4} \text{(與 } P \text{ 之坐標無關)}$$

(ⅱ)當直綫 PP_i 中有一垂直 x 軸時,設爲 PP_1,則 P_1' 之坐標爲 $(ct_1^2, 0)$ 且 $t_1=-t_0$,此時 $(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (PP_1', PP_2', PP_3', PP_4') = (P_1'P_2', P_3'P_4')$

$$= \frac{-ct_3t_0-ct_1^2}{-ct_3t_0-(-ct_2t_0)} : \frac{-ct_4t_0-ct_1^2}{-ct_4t_0-(-ct_2t_0)}$$

$$= \frac{ct_3t_1-ct_1^2}{ct_3t_1-ct_2t_1} : \frac{ct_4t_1-ct_1^2}{ct_4t_1-ct_2t_1} = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} : \frac{t_1-t_4}{t_2-t_4}.$$

綜合(ⅰ),(ⅱ),得 $(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} : \frac{t_1-t_4}{t_2-t_4}$,

同理,設 Q 爲異於 P 和 P_i 之任一點,$(QP_1, QP_2, QP_3, QP_4) = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} : \frac{t_1-t_4}{t_2-t_4}$

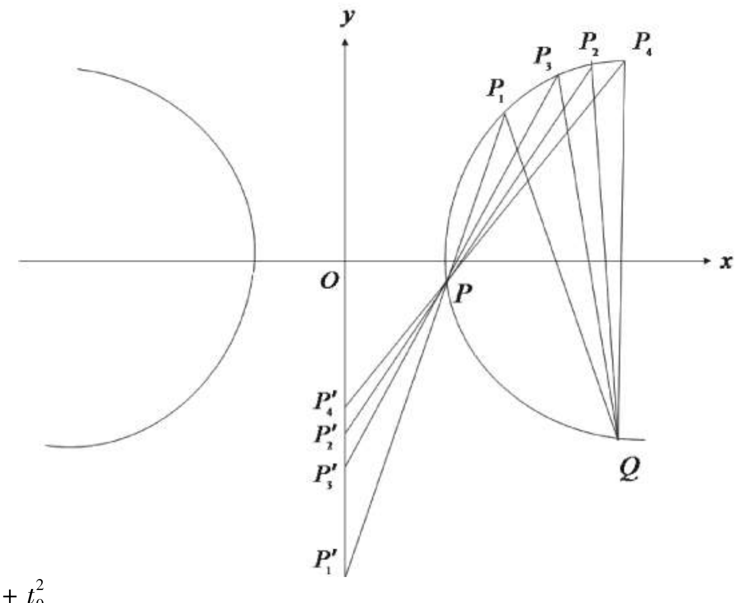
故 $(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (QP_1, QP_2, QP_3, QP_4)$.

(二)對雙曲綫之言,直接證明如下:

設雙曲綫之方程爲 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

其參數式可表爲:$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}a$, $y = \frac{2t}{1-t^2}b$(t 爲參數),

設 P, P_1, P_2, P_3, P_4 爲此雙曲綫上之點,其坐標分別爲:(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4),其對應之 t 值分別爲 t_0, t_1, t_2, t_3, t_4,連 PP_i($i=1,2,3,4$),設直綫 PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 與 y 軸之交點分別爲 P_1', P_2', P_3', P_4',如右圖所示:



(ⅰ)當直綫 PP_i 均不與 y 軸垂直或平行時,

直綫 PP_i 之方程爲,$y = y_i = m_i(x - x_i)$,($i=1,2,3,4$)

即 $y = \frac{2t_0}{1-t_0^2}b = m_i\left(x - \frac{1+t_0^2}{1-t_0^2}a\right)$,($i=1,2,3,4$)

其中 $m_i = \dfrac{\left(\dfrac{2t_i}{1-t_i^2} - \dfrac{2t_0}{1-t_0^2}\right)b}{\dfrac{1+t_i^2}{1-t_i^2} - \dfrac{1+t_0^2}{1-t_0^2}a} = \dfrac{2b(t_i - t_0)(t_it_0 + 1)}{2a(t_i + t_0)(t_i - t_0)} = \dfrac{b(t_it_0 + 1)}{a(t_i + t_0)}$,

$(i = 1,2,3,4)$

以 $x = 0$ 代入 PP_i 之方程,得

$$y = m_i\left(-\frac{1+t_0^2}{1-t_0^2}a\right) + \frac{2t_0}{1-t_0^2}b = \left(\frac{t_it_0+1}{t_i+t_0}\cdot\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{1+t_0^2}{1-t_0^2}a\right) + \frac{2t_0}{1-t_0^2}b$$

$$= \frac{-(t_it_0 + 1 + t_it_0^3 + t_0^2)2t_it_0 + 2t_0^2}{(t_i+t_0)(1-t_0^2)}b = \frac{t_it_0(1-t_0^2) - (1-t_0^2)}{(t_i+t_0)(1-t_0^2)}b = \frac{t_it_0 - 1}{t_i + t_0}b,$$

此為 P_i' 之縱坐標$(i = 1,2,3,4)$.

$$(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4) = (PP_1',PP_2',PP_3',PP_4') = (P_1'P_2',P_3'P_4')$$

$$= \frac{\dfrac{t_1t_0-1}{t_1+t_0}b - \dfrac{t_3t_0-1}{t_3+t_0}b}{\dfrac{t_2t_0-1}{t_2+t_0}b - \dfrac{t_3t_0-1}{t_3+t_0}b}\cdot\frac{\dfrac{t_2t_0-1}{t_2+t_0}b - \dfrac{t_4t_0-1}{t_4+t_0}b}{\dfrac{t_1t_0-1}{t_1+t_0}b - \dfrac{t_4t_0-1}{t_4+t_0}b}$$

$$= \frac{(t_1+t_3)(t_0^2+1)}{(t_2-t_3)(t_0^2+1)}\cdot\frac{(t_2-t_4)(t_0^2+1)}{(t_1-t_4)(t_0^2+1)}$$

$$= \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3}\cdot\frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}(\text{所得結果與 } P \text{ 之坐標無關}).$$

(ⅱ) 當直綫 PP_i 中有一平行 y 軸時,設為 PP_4,此時 P_4' 為 y 軸上之無限遠點,

$$(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4) = (PP_1',PP_2',PP_3',PP_4')$$

$$= (P_1'P_2',P_3'P_4') = \frac{P_1'P_3'}{P_2'P_3'} = \frac{\dfrac{t_1t_0-1}{t_1+t_0}b - \dfrac{t_3t_0-1}{t_3+t_0}b}{\dfrac{t_2t_0-1}{t_2+t_0}b - \dfrac{t_3t_0-1}{t_3+t_0}b}$$

$$= \frac{\dfrac{(t_1-t_3)(1+t_0^2)}{(t_1+t_0)(t_3+t_0)}}{\dfrac{(t_2-t_3)(1+t_0^2)}{(t_2+t_0)(t_3+t_0)}} = \frac{(t_1-t_3)(t_2+t_0)}{(t_2-t_3)(t_1+t_0)}.$$

此時,P 與 P_4 有相同之橫坐標,$\dfrac{1+t_0^2}{1-t_0^2} = \dfrac{1+t_4^2}{1-t_4^2}$,解得 $t_0 = -t_4$,代入上式,得

$$\frac{(t_1-t_3)(t_2+t_0)}{(t_2-t_3)(t_1+t_0)} = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3}\cdot\frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}.$$

(ⅲ) 當直綫 PP_i 中有一垂直 y 軸時,設為 PP_1,則 P_1' 之坐標為$\left(0,\dfrac{2t_1}{1-t_1^2}b\right)$ 且 t_0 與 t_1 之關係為 $t_0 = -\dfrac{1}{t_1}$,此時

$$(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4)=(PP_1',PP_2',PP_3',PP_4')=(P_1'P_2',P_3'P_4')$$

$$=\frac{\frac{2t_1}{1-t_1^2}b-\frac{t_3t_0-1}{t_3+t_0}b}{\frac{t_2t_0-1}{t_2+t_0}b-\frac{t_3t_0-1}{t_3+t_0}b}\cdot\frac{\frac{t_2t_0-1}{t_2+t_0}b-\frac{t_4t_0-1}{t_4+t_0}b}{\frac{2t_1}{1-t_1^2}b-\frac{t_4t_0-1}{t_4+t_0}b}$$

$$=\frac{\frac{2t_1}{1-t_1^2}+\frac{t_3+t_1}{t_1t_3-1}}{\frac{-t_2-t_1}{t_1t_2-1}+\frac{t_3+t_1}{t_1t_3-1}}\cdot\frac{\frac{-t_2-t_1}{t_1t_2-1}+\frac{t_4+t_1}{t_1t_4-1}}{\frac{2t_1}{1-t_1^2}-\frac{t_4+t_1}{t_1t_4-1}}$$

$$=\frac{\frac{(1+t_1^2)(t_3-t_1)}{(1-t_1^2)(t_1t_3-1)}}{\frac{(1+t_1^2)(t_2-t_3)}{(t_1t_2-1)(t_1t_3-1)}}\cdot\frac{\frac{(1+t_1^2)(t_2-t_4)}{(t_1t_2-1)(t_1t_4-1)}}{\frac{(1+t_1^2)(t_4-t_1)}{(1-t_1^2)(t_1t_4-1)}}$$

$$=\frac{t_1-t_3}{t_2-t_3}\cdot\frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}.$$

（ⅳ）當直綫 PP_i 中有一垂直 y 軸，設爲 PP_1，且又有一平行 y 軸，設爲 PP_4，則 $t_0=-t_4=-\frac{1}{t_1}$ 且 $t_0^2=\frac{t_4}{t_1}$，

$$(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4)=(PP_1',PP_2',PP_3',PP_4')=(P_1'P_2',P_3'P_4')=\frac{P_1'P_3'}{P_2'P_3'}$$

$$=\frac{\frac{2t_0}{1-t_0^2}b-\frac{t_3t_0-1}{t_3+t_0}b}{\frac{t_2t_0-1}{t_2+t_0}b-\frac{t_3t_0-1}{t_3+t_0}b}=\frac{(1+t_0^2)(1+t_0t_3)}{(1-t_0^2)(t_3+t_0)}\cdot\frac{(t_2+t_0)(t_3+t_0)}{(1+t_0^2)(t_2-t_3)}$$

$$=\frac{1+t_0t_3}{1-t_0^2}\cdot\frac{t_2+t_0}{t_2-t_3}=\frac{1-\frac{t_3}{t_1}}{1-\frac{t_4}{t_1}}\cdot\frac{t_2-t_4}{t_2-t_3}=\frac{t_1-t_3}{t_2-t_3}\cdot\frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}.$$

綜合（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ），（ⅳ）得 $(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4)=\frac{t_1-t_3}{t_2-t_3}\cdot\frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}$.

同理，設 Q 爲此雙曲綫上異於 P 和 $P_i(i=1,2,3,4)$ 之任一點，.

$$(QP_1,QP_2,QP_3,QP_4)=\frac{t_1-t_3}{t_2-t_3}\cdot\frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}.$$

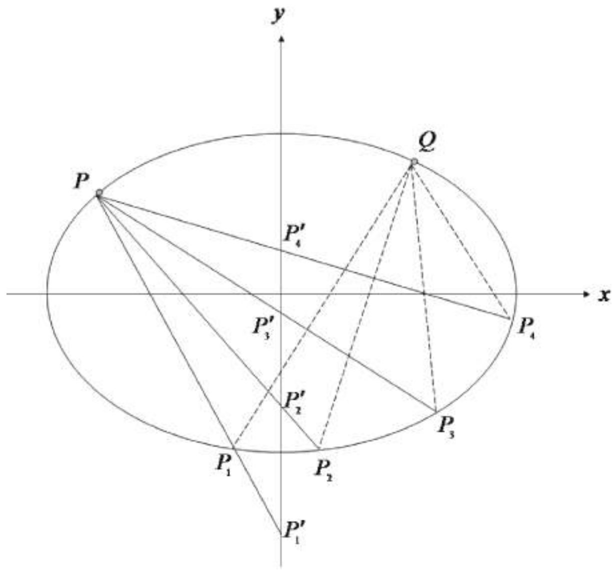
故 $(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4)=(QP_1,QP_2,QP_3,QP_4)$

（三）橢圓方面，直接证法如下：

設橢圓之方程爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其參數式可表爲

$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}a$，$y=\frac{2t}{1+t^2}b$（t 爲參數）.

設 P, P_1, P_2, P_3, P_4 爲此橢圓上之點，其坐標分別爲：(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，(x_4, y_4)，其對應之 t 值分別爲 t_0, t_1, t_2, t_3, t_4，連 $PP_i(i = 1,2,3,4)$，設直綫 PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 與 y 軸之交點分別爲 P_1', P_2', P_3', P_4'，如右圖所示：



（ⅰ）當直綫 PP_i 均不與 y 軸垂直或平行時，

直綫 PP_i 之方程爲 $y - y_i = m_i(x - x_i)(i = 1,2,3,4)$，

即 $y - \dfrac{2t_0}{1 + t_0^2}b = m_i(x - \dfrac{1 - t_0^2}{1 + t_0^2}a)$ $(i = 1,2,3,4)$.

$$\text{其中 } m_i = \frac{(\frac{2t_i}{1 + t_i^2} - \frac{2t_0}{1 + t_0^2})b}{(\frac{1 - t_i^2}{1 + t_i^2} - \frac{1 - t_0^2}{1 + t_0^2})a} = \frac{2b(t_0 - t_i)(t_it_0 - 1)}{2a(t_i + t_0)(t_0 - t_i)} = \frac{b(t_it_0 - 1)}{a(t_i + t_0)}(i = 1,2,3,4).$$

以 $x = 0$ 代入，得

$$y = m_i(-\frac{1 - t_0^2}{1 + t_0^2}a) + \frac{2t_0}{1 + t_0^2}b = (\frac{t_it_0 - 1}{t_i + t_0} \cdot \frac{b}{a})(-\frac{1 - t_0^2}{1 + t_0^2}a) + \frac{2t_0}{1 + t_0^2}b$$

$$= \frac{-(t_it_0 - 1 - t_it_0^3 + t_0^2) + 2t_it_0 + 2t_0^2}{(t_i + t_0)(1 + t_0^2)}b = \frac{t_it_0(1 + t_0^2) + (1 + t_0^2)}{(t_i + t_0)(1 + t_0^2)}b = \frac{t_it_0 + 1}{t_i + t_0}b.$$

此爲 P_i' 之縱坐標$(i = 1,2,3,4)$.

$$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (PP_1', PP_2', PP_3', PP_4') = (P_1'P_2', P_3'P_4')$$

$$= \frac{\frac{t_1t_0 + 1}{t_1 + t_0}b - \frac{t_3t_0 + 1}{t_3 + t_0}b}{\frac{t_2t_0 + 1}{t_2 + t_0}b - \frac{t_3t_0 + 1}{t_3 + t_0}b} \cdot \frac{\frac{t_2t_0 + 1}{t_2 + t_0}b - \frac{t_4t_0 + 1}{t_4 + t_0}b}{\frac{t_1t_0 + 1}{t_1 + t_0}b - \frac{t_4t_0 + 1}{t_4 + t_0}b}$$

$$= \frac{(t_1 - t_3)(t_0^2 - 1)}{(t_2 - t_3)(t_0^2 - 1)} \cdot \frac{(t_2 - t_4)(t_0^2 - 1)}{(t_1 - t_4)(t_0^2 - 1)}$$

$$= \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} \cdot \frac{t_2 - t_4}{t_1 - t_4}\text{（所得結果與 } P \text{ 之坐標無關）}.$$

（ⅱ）當直綫 PP_i 中有一平行 y 軸時，設爲 PP_4，此時 P_4' 爲 y 軸上之無限遠點，此時，$t_0 = -t_4$.

$$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (PP_1', PP_2', PP_3', PP_4')$$

$$= (P_1'P_2', P_3'P_4') = \frac{P_1'P_3'}{P_2'P_3'} = \frac{\frac{t_1t_0+1}{t_1+t_0}b - \frac{t_3t_0+1}{t_3+t_0}b}{\frac{t_2t_0+1}{t_2+t_0}b - \frac{t_3t_0+1}{t_3+t_0}b}$$

$$= \frac{\frac{(t_1-t_3)(t_0^2-1)}{(t_1+t_0)(t_3+t_0)}}{\frac{(t_2-t_3)(t_0^2-1)}{(t_2+t_0)(t_3+t_0)}} = \frac{(t_1-t_3)(t_2+t_0)}{(t_2-t_3)(t_1+t_0)} = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} \cdot \frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}.$$

(ⅲ)當直綫 PP_i 中有一垂直 y 軸時,設爲 PP_1,則之 P_1' 坐標爲$(0, \frac{2t_1}{1+t_1^2}b)$ 且 t_0 與 t_1 之關係爲 $t_0 = \frac{1}{t_1}$,此時

$$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (PP_1', PP_2', PP_3', PP_4') = (P_1'P_2', P_3'P_4')$$

$$= \frac{\frac{2t_1}{1+t_1^2}b - \frac{t_3t_0+1}{t_3+t_0}b}{\frac{t_2t_0+1}{t_2+t_0}b - \frac{t_3t_0+1}{t_3+t_0}b} \cdot \frac{\frac{t_2t_0+1}{t_2+t_0}b - \frac{t_4t_0+1}{t_4+t_0}b}{\frac{2t_1}{1+t_1^2}b - \frac{t_4t_0+1}{t_4+t_0}b}$$

$$= \frac{\frac{2t_1}{1+t_1^2}b - \frac{t_3+t_1}{t_1t_3+1}b}{\frac{t_2+t_1}{t_1t_2+1}b - \frac{t_3+t_1}{t_1t_3+1}b} \cdot \frac{\frac{t_2+t_1}{t_1t_2+1}b - \frac{t_4+t_1}{t_1t_4+1}b}{\frac{2t_1}{1+t_1^2}b - \frac{t_4+t_1}{t_1t_4+1}b}$$

$$= \frac{\frac{(t_1-t_3)(1-t_1^2)}{(1+t_1^2)(t_1t_3+1)}}{\frac{(t_2-t_3)(1-t_1^2)}{(t_1t_2+1)(t_1t_3+1)}} \cdot \frac{\frac{(t_2-t_4)(1-t_1^2)}{(t_1t_2+1)(t_1t_4+1)}}{\frac{(t_1-t_4)(1-t_1^2)}{(1+t_1^2)(t_1t_4+1)}}$$

$$= \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} \cdot \frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}$$

(ⅳ)當直綫 PP_i 中有一垂直 y 軸,設爲 PP_1,且又有一平行 y 軸,設爲 PP_4,則 $t_0 = -t_4 = \frac{1}{t_1}$ 且 $t_0^2 = -\frac{t_4}{t_1}$.

$$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (PP_1', PP_2', PP_3', PP_4')$$

$$= (P_1'P_2', P_3'P_4') = \frac{P_1'P_3'}{P_2'P_3'} = \frac{\frac{2t_0}{1+t_0^2}b - \frac{t_3t_0+1}{t_3+t_0}b}{\frac{t_2t_0+1}{t_2+t_0}b - \frac{t_3t_0+1}{t_3+t_0}b}$$

$$= \frac{(1-t_0^2)(t_0t_3-1)}{(1+t_0^2)(t_3+t_0)} \cdot \frac{(t_2+t_0)(t_3+t_0)}{(t_0^2-1)(t_2-t_3)}$$

$$= \frac{1 - t_0 t_3}{1 + t_0^2} \cdot \frac{t_2 + t_0}{t_2 - t_3} = \frac{1 - \dfrac{t_3}{t_1}}{1 - \dfrac{t_4}{t_1}} \cdot \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_3}$$

$$= \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} \cdot \frac{t_2 - t_4}{t_1 - t_4}.$$

綜合(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)得$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = \dfrac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} \cdot \dfrac{t_2 - t_4}{t_1 - t_4}$.

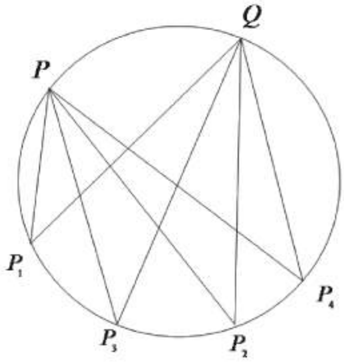
同前,設 Q 爲此橢圓上異於 P 和 $P_i (i = 1,2,3,4)$ 之任一點,

$(QP_1, QP_2, QP_3, QP_4) = \dfrac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} \cdot \dfrac{t_2 - t_4}{t_1 - t_4}$,

故$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (QP_1, QP_2, QP_3, QP_4)$.

(四)對於橢圓,有另一证法如下:

(ⅰ)先證圓之對應定理:P_1, P_2, P_3, P_4 爲圓上四定點,P, Q 爲此圓上異於 P_1, P_2, P_3, P_4 的任兩點,如右下圖所示,則由直綫的交比定義得



$$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = \frac{sin\angle P_1PP_3}{sin\angle P_2PP_3} \cdot \frac{sin\angle P_1PP_4}{sin\angle P_2PP_4}$$

$$(QP_1, QP_2, QP_3, QP_4) = \frac{sin\angle P_1QP_3}{sin\angle P_2QP_3} \cdot \frac{sin\angle P_1QP_4}{sin\angle P_2QP_4}$$

而 $\angle P_1PP_3 = \angle P_1QP_3, \angle P_2PP_3 = \angle P_2QP_3, \angle P_1PP_4 = \angle P_1QP_4, \angle P_2PP_4 = \angle P_2QP_4$(截同弧的圓周角等),

故$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (QP_1, QP_2, QP_3, QP_4)$.

(ⅱ)設橢圓方程爲$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,作變換 $y' = \dfrac{a}{b} y$(即 $y = \dfrac{b}{a} y'$),即將 y 軸上的單位擴大至原來的$\dfrac{a}{b}$倍,而 $x' = x$,即 x 軸上的單位不變更,則方程$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 變成$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$,即$x'^2 + y'^2 = a^2$,對新坐標係而言,此方程之圖形爲一圓,圓心是原點,半徑是a.

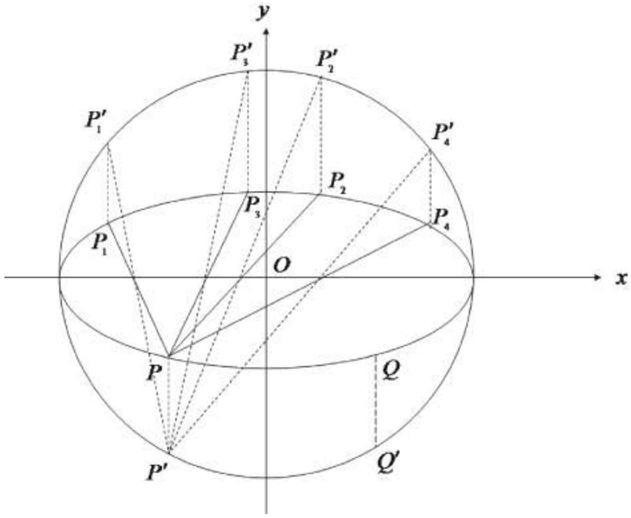
對於這種變換,綫段的長度不能維持,但綫段中點的關係不變,即若點 $P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$經變換後,成爲$P_1'(x_1', y_1')$,$P_2'(x_2', y_2')$,綫段P_1, P_2之中點$M(\bar{x}, \bar{y})$經變換後,成爲$M'(\bar{x}', \bar{y}')$,則 M' 仍爲綫段 $P_1'P_2'$ 之中點,這是因爲

$$\bar{y}' = \frac{a}{b}\bar{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\dfrac{a}{b}y_1 + \dfrac{a}{b}y_2}{2} = \frac{y_1' + y_2'}{2}.$$

又因$\dfrac{y_1 - y_2}{y_3 - y_4} = \dfrac{y_1' - y_2'}{y_3' - y_4'}$(右邊分子分母化爲原來坐標後有共同因子$\dfrac{a}{b}$,約去後即得),故知直綫上四點經變換後,交比不變.

直綫 $Ax+By=C$ 經變換後,成爲 $Ax'+B(\frac{a}{b})y'=C$,與 x 軸之交點不變.

右圖是橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,與經變換 $y'=\frac{a}{b}y$(即 $y=\frac{b}{a}y'$),$x'=x$ 後,所成之圓 $x'^2+y'^2=a^2$,兩者置於同一坐標係之圖形(此時,圓 $x^2+y^2=a^2$ 即圓 $x'^2+y'^2=a^2$),設 P,Q,P_1,P_2,P_3,P_4 爲原來在橢圓上的點,經變換後成爲圓上的 $P',Q',P_1',P_2',P_3',P_4'$ 點,則直綫 $PP_i(i=1,2,3,4)$ 與 x 軸之交點亦是直綫 $P'P_i'(i=1,2,3,4)$ 與 x 軸(即 x' 軸)之交點,故知



$(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4)=(P'P_1',P'P_2',P'P_3',P'P_4')$

同理可得 $(QP_1,QP_2,QP_3,QP_4)=(Q'P_1',Q'P_2',Q'P_3',Q'P_4')$.

而對圓 $x^2+y^2=a^2$(即 $x'^2+y'^2=a^2$)而言,由圓之對應定理,有,

$(P'P_1',P'P_2',P'P_3',P'P_4')=(Q'P_1',Q'P_2',Q'P_3',Q'P_4')$.

故 $(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4)=(QP_1,QP_2,QP_3,QP_4)$.

***Steiner* 定理之第二部份:若 P_4T 為此圓錐曲綫在 P_4 之切綫,則**

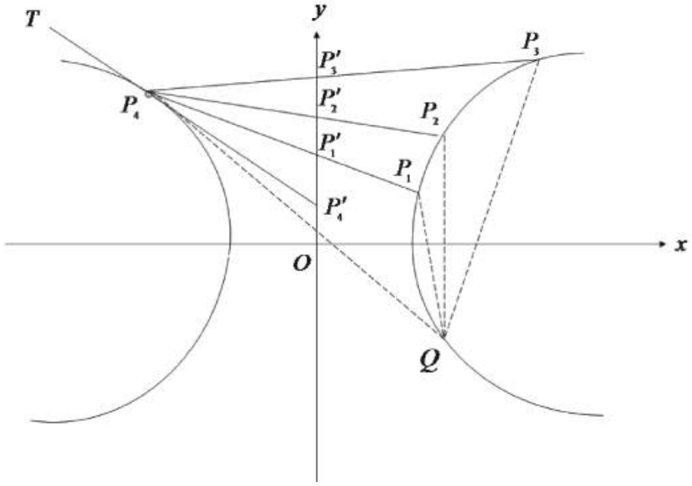
$(P_4P_1,P_4P_2,P_4P_3,P_4T)=(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4)=(QP_1,QP_2,QP_3,QP_4)$.

〔證明〕

雙曲綫: 僅就(二)(ⅰ)之情況證之如下(右下圖):

在上述(二)(ⅰ)之直接證明中,以 P_4 代 P,t_4 代 t_0,P_2',P_2',P_3' 之縱坐標求法如前,僅 P_4' 之縱坐標求法有異,方法如下:

雙曲綫在 P_4 之切綫(即 P_4T)方程:$\frac{(\frac{1+t_4^2}{1-t_4^2}a)x}{a^2}-\frac{(\frac{2t_4}{1-t_4^2}b)y}{b^2}=1$, 其在 y 軸上之截距爲 $\frac{t_4^2-1}{2t_4}b$(此即 P_4' 之縱坐標),故



$(P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3, P_4T) = (P_4P_1', P_4P_2', P_4P_3', P_4P_4') = (P_1'P_2', P_3'P_4')$

$$= \frac{\frac{t_1t_4-1}{t_1+t_4}b - \frac{t_3t_4-1}{t_3+t_4}b}{\frac{t_2t_4-1}{t_2+t_4}b - \frac{t_3t_4-1}{t_3+t_4}b} \cdot \frac{\frac{t_2t_4-1}{t_2+t_4}b - \frac{t_4^2-1}{2t_4}b}{\frac{t_1t_4-1}{t_1+t_4}b - \frac{t_4^2-1}{2t_4}b}$$

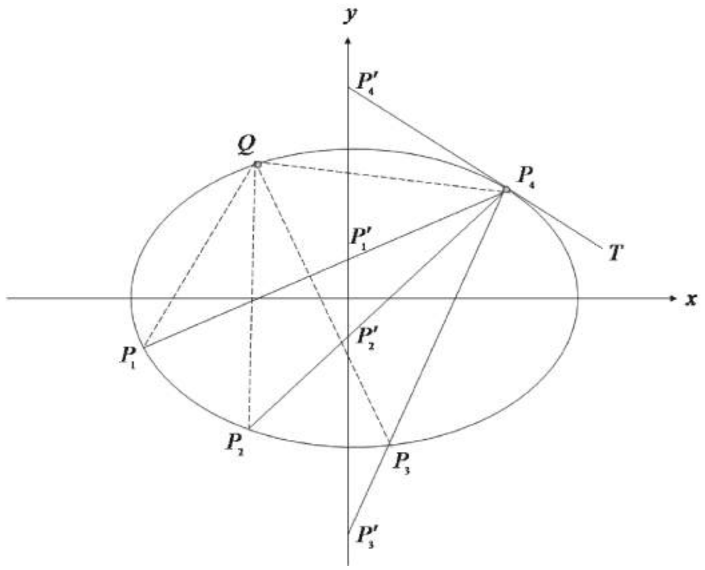
$$= \frac{(t_1-t_3)(t_4^2+1)}{(t_2-t_3)(t_4^2+1)} \cdot \frac{(t_2-t_4)(t_4^2+1)}{(t_1-t_4)(t_4^2+1)} = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} \cdot \frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}.$$

如前,$(QP_1, QP_2, QP_3, QP_4) = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} \cdot \frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}$,

因此$(P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3, P_4T) = (QP_1, QP_2, QP_3, QP_4)$

(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)之情況類似,證明從略.

橢圓: 僅就(三)(ⅰ)之情況證之如下(右下圖):



在上述(三)(ⅰ)之直接證明中,以 P_4 代 P,t_4 代 t_0,P_1',P_2',P_3' 之縱坐標求法如前,僅 P_4' 之縱坐標求法有異,方法如下:

橢圓在 P_4 之切綫(即 P_4T)方程:$\frac{(\frac{1-t_4^2}{1+t_4^2}a)x}{a^2} + \frac{(\frac{2t_4}{1+t_4^2}b)y}{b^2} = 1$,其在 y 軸上之截距爲 $\frac{1+t_4^2}{2t_4}b$(此即 P_4' 之縱坐標),故

$(P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3, P_4T) = (P_4P_1', P_4P_2', P_4P_3', P_4P_4') = (P_1'P_2', P_3'P_4')$

$$= \frac{\frac{t_1t_4+1}{t_1+t_4}b - \frac{t_3t_4+1}{t_3+t_4}b}{\frac{t_2t_4+1}{t_2+t_4}b - \frac{t_3t_4+1}{t_3+t_4}b} \cdot \frac{\frac{t_2t_4+1}{t_2+t_4}b - \frac{1+t_4^2}{2t_4}b}{\frac{t_1t_4+1}{t_1+t_4}b - \frac{1+t_4^2}{2t_4}b}$$

$$= \frac{(t_1-t_3)(t_4^2-1)}{(t_2-t_3)(t_4^2-1)} \cdot \frac{(t_2-t_4)(t_4^2-1)}{(t_1-t_4)(t_4^2-1)} = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} \cdot \frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}.$$

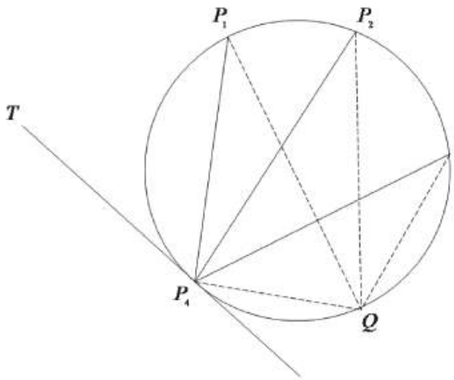
如前,$(QP_1, QP_2, QP_3, QP_4) = \frac{t_1-t_3}{t_2-t_3} \cdot \frac{t_2-t_4}{t_1-t_4}$,

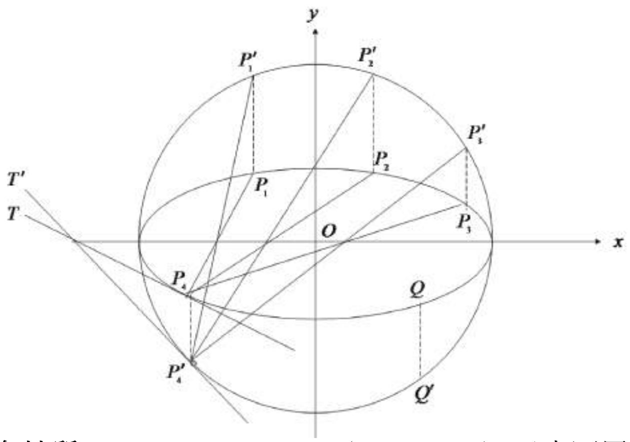
因此$(P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3, P_4T) = (QP_1, QP_2, QP_3, QP_4)$.

(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)之情況類似,證明從略.

又拋物綫之證明亦類似,不贅.

又(四)之第二部份證明:仿前,先證對圓之情況成立.





左上圖中,P_4T 是圓的切綫,由弦切角性質,$\angle P_iP_4T = \angle P_iQP_4(i = 1,2,3)$,又由圓周角性質,$\angle P_iP_4P_j = \angle P_iQP_j(i,j = 1,2,3;i \neq j)$,仿前易得

$(P_4P_1,P_4P_2,P_4P_3,P_4T) = (QP_1,QP_2,QP_3,QP_4)$.

對橢圓$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$,作變換 $y' = \dfrac{a}{b}y$(即 $y = \dfrac{b}{a}y'$),$x' = x$ 後,所成之圓爲 $x'^2 + y'^2 = a^2$,兩者置於同一坐標係,圖形如右上圖所示.

橢圓之切綫 P_4T 經變換後成爲 $P_4'T'$,爲圓之切綫,且在 x 軸有相同截距,故

$(P_4P_1,P_4P_2,P_4P_3,P_4T) = (P_4'P_1',P_4'P_2',P_4'P_3',P_4'T')$,但由圓之對應定理,

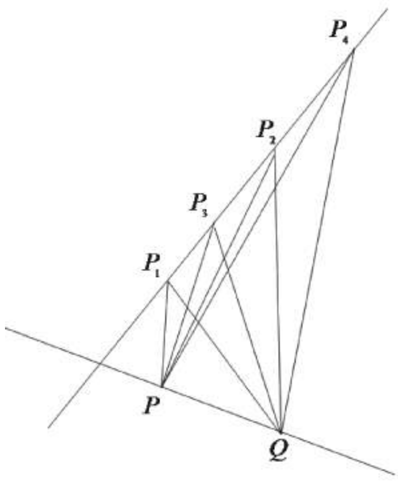
$(P_4'P_1',P_4'P_2',P_4'P_3',P_4'T') = (Q'P_1',Q'P_2',Q'P_3',Q'P_4')$.

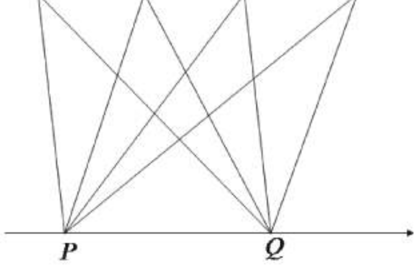
同理,因 QP_i 與 $Q'P_i'$ 分別在 x 軸有相同之截距$(i = 1,2,3,4)$,

$(QP_1,QP_2,QP_3,QP_4) = (Q'P_1',Q'P_2',Q'P_3',Q'P_4')$,

故$(P_4P_1,P_4P_2,P_4P_3,P_4T) = (QP_1,QP_2,QP_3,QP_4)$.

Steiner 定理在退化圓錐曲綫上依然成立,但僅對於交比有意義之點而言,如下列二例:





其證明甚易,直接利用直綫交比之定義即得.

[注] **作者為澳門培正中學原校長.**

三角形全等條件的進一步探究(二)

澳門大學教育學院　江春蓮

一、背景介紹

2012 年 12 月 12 月 1 －2 日,澳門舉行了首屆中學數學優質課堂教學比賽. 是次比賽課題,我們選定的是三角形全等的探究,即在三角形對應邊和角中有兩對對應相等的基礎上增加與給定的邊或角相關聯的中線、高和角平分線,討論了表 1 所列的各種情況. 筆者在文[1] 用解三角形的方法探討了表 1 各種情況能否成爲兩三角形全等的判定定理,在文末以 $C_{15}^{3}=455$ 種可能中,列出了從高線、中線或角平分線中僅取一條的27 種可能(見表2). 這學期,筆者讓數學專業大三的學生來探討這些問題,他們沒能完全得到答案,於是筆者親自對這些問題進行探究,探究過程中發現,這些問題需要用到不同的解決辦法,有的可以考慮直接作圖,有的則需要用到軌跡,有的則需要用到函數的單調性,於是有了本文.

表 1　兩三角形的對應邊(三對) 和角(三對) 中已知兩對對應相等,外加與它們關聯的中線、高和角平分線:

	中線	高	角平分線
邊及夾該邊的一角	(A) 該邊上的中線	(B) 該邊上的高	(C) 該角的角平分線
兩邊	(D) 其中一邊上的中線	(E) 其中一邊上的高	(F) 夾角的角平分線或其中一邊所對角的角平分線
角角	(G) 其中一角所對邊上的中線	(H) 其中一角所對邊上的高	(I) 其中一角的角平分線

表2　兩三角形的對應邊(三對) 和角(三對) 中已知兩對,外加中線(三對) 、高(三對) 和角平分線(三對) 中的一條的各種組合:

			中線	高	角平分線
(a) 一角一邊	角、角的一邊 $\angle B$ 和 BC	AB 上的	$A1$ ×	$A2$ ×	$A3$ ×
		BC 上的	$B1$ ×	$B2$√	$B3$√
		AC 上的	$C1$ ×	$C2$√	$C3$√
	角、角的對邊 $\angle B$ 和 AC	AC 上的	$D1$√	$D2$√	$D3$√
		AB 上的	$E1$ ×	$E2$√	$E3$ ×

(b) 兩邊 AB 和 BC	BC 上的	$F1$√	$F2$√	$F3$√
	AC 上的	$G1$√	$G2$ ×	$G3$√
(c) 兩邊 $\angle B$ 和 $\angle C$	AB 上的	$H1$√	$H2$√	$H3$√
	BC 上的	$I1$√	$I2$√	$I3$√

注:(1) 後面三列中的 $A1$,$A2$,$A3$ 等等是筆者對這些情況的記錄,方便後面的討論和讀者的查找.

(2) 這裏的"×" 表示不能成爲判定定理,"√" 表示能成爲判定定理.

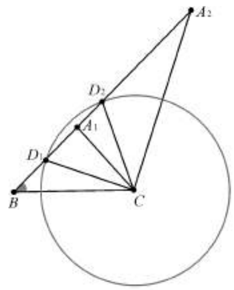
在新課程中,幾何內容已經變得不重要了,但我們覺得,幾何對培養數學能力較強的學生來說,對其思維能力的訓練是其他學科無法替代的,所以可以讓他們對這樣的問題進行探究. 筆者曾在新加坡一所中學工作一年有餘,其中一項很重要的任務就是幫助那些在國立大學數學係參加奧數培訓的學生學習研究幾何問題,因爲在新加坡的常規數學課程中幾乎沒有平面幾何的內容,國大的培訓重點是幾何. 著名的新加坡數學家、數學教育家李秉彝先生曾說,沒有幾何的訓練,在數學領域就很難走遠.

這裏探討的問題有 2 種表述方法,一是用全等的表述,如 $A1$ 可以表述爲,給定 $\angle B = \angle B'$,$BC = B'C'$,AB 和 $A'B'$ 上的中線 $CD = C'D'$,能否證明 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$?另一種是作圖的表述,如 $A1$ 也可表述爲,給定 $\angle B$,BC,和 AB 上的中線 CD,能否作出唯一的一個 $\triangle ABC$ 滿足給定條件?我們多數采用作圖法來解決,確定滿足條件的三角形是否唯一.

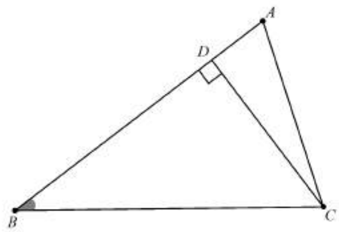
二、各種情況求解

$A1$:給定 $\angle B$、BC 和 AB 上的中線 CD.

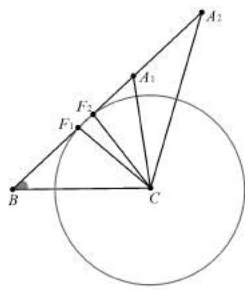
【解】以 CD 長爲半徑作圓,其可能與 AB 邊相交於兩點 D_1,D_2,再延長 BD_1 和 BD_2,從而得到三角形 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 滿足條件,但它們不全等,所以 $A1$ 不能成爲判定定理.



$A1$ 圖



$A2$ 圖



$A3$ 圖

$A2$:給定 $\angle B$、BC 和 AB 上的高線 CD.

【解】A 點可以在射線 AB 邊上任何地方,滿足條件的三角形無窮多,它們也不全等,所以 $A2$ 不能成爲判定定理.

$A3$:給定 $\angle B$、BC 和 $\angle C$ 的角分線 CF.

【解】以 CF 長爲半徑作圓,其可能與 AB 邊相交於兩點 F_1,F_2,G 再作 $\angle F_1CA_1 =$

$\angle BCF_1$ 和 $\angle F_2CA_2 = \angle BCF_2$,從而得到三角形 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 滿足條件,但它們不全等,所以 $A3$ 不能成爲判定定理.

$B1$:給定 $\angle B$、BC 和 BC 上的中線 AD.

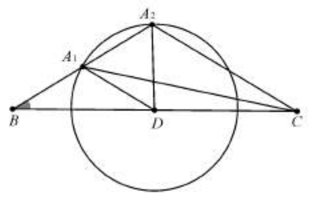
【解】以 BC 的中點 D 爲圓心,AD 長爲半徑作圓,其可能與 AB 邊相交於兩點 A_1,A_2,得到 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 滿足條件,但它們不全等,所以 $B1$ 不能成爲判定定理.

$B2$:給定 $\angle B$、BC 和 BC 上的高線 AD.

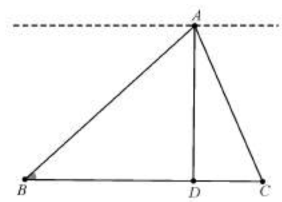
【解】先作 $\angle ABC$,再作平行於 BC,且到 BC 的距離等於高 AD 的直線,該直線與 AB 的交點即爲 A 點,得到唯一的 $\triangle ABC$ 滿足條件,所以 $B2$ 可以成爲判定定理.

$B3$:給定 $\angle B$、BC 和 $\angle A$ 的角分線 AD.

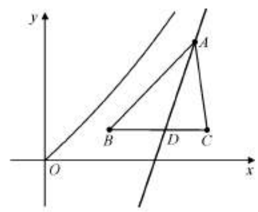
【解】先作 $\angle B$ 和 BC,A 在 $\angle B$ 的另一邊上移動. A 動帶動角平分線 AD 動,我們可以作出以 AB 的長爲橫坐標,以 AD 的長爲縱坐標的點的圖像(下圖中的紅線),由圖像的單調性我們知道,只有一個 $\triangle ABC$ 的滿足條件,所以 B_3 可以成爲判定定理.



B1 圖



B2 圖



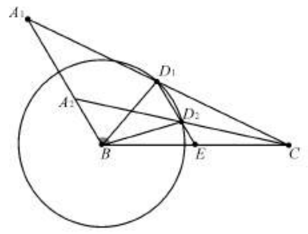
B3 圖

$C1$:給定 $\angle B$、BC 和 AC 上的中線 BD.

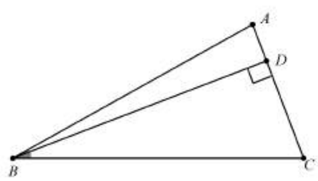
【解】先作 $\angle B$ 和 BC,A 爲 $\angle B$ 的另外一邊上移動. A 動時,AC 邊的中點 D 畫出與 AB 平行的線 ED,以 B 爲圓心、BD 長爲半徑作圓,該圓可能與 ED 有兩個交點 D_1,D_2,延長 CD_1 和 CD_2,與 AB 交於 A_1、A_2,得到兩個不全等的 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 滿足條件,所以 C_1 不能成爲判定定理.

$C2$:給定 $\angle B$、BC 和 AC 上的高線 BD.

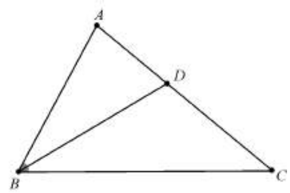
【解】先作 $\triangle BDC(HL)$,再作 $\angle B$,CD 或其延長線與 AB 的交點爲點 A,得到唯一的 $\triangle ABC$ 滿足條件,所以 $C2$ 可以成爲判定定理.



C1 圖



C2 圖



C3 圖

$C3$:給定 $\angle B$、BC 和 $\angle B$ 的角平分線 BD.

【解】先作 $\triangle BDC(SAS)$,再作 $\angle B$,CD 或其延長線與 AB 的交點爲點 A,得到唯一的

$\triangle ABC$ 滿足條件,所以 $C3$ 可以成爲判定定理.

對 $D1-D3$ 和 $E1-E3$ 類的問題,因爲給定的是 $\angle B$ 和 AC,所以 B 點的軌跡是對着 AC 的一段圓弧.

$D1$:給定 $\angle B$、AC 和 AC 邊的中線 BD.

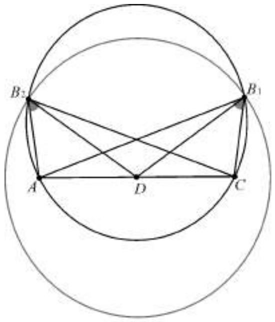
【解】作以 AC 的中點 D 爲圓心,中線 BD 長爲半徑的圓,其與 B 點的軌跡相交於兩點 B_1、B_2,得到 $\triangle AB_1C$ 和 $\triangle AB_2C$ 滿足條件,但這兩個三角形全等,所以解唯一,$D1$ 可以成爲判定定理.

$D2$:給定 $\angle B$、AC 和 AC 邊上的高線 BD.

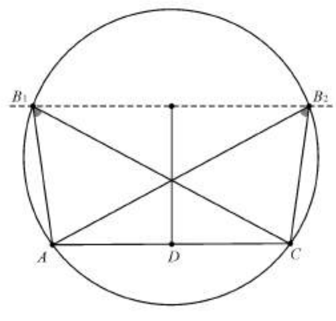
【解】作與 AC 平行,且到 AC 的距離與高線 BD 等長的直線,其與 B 點的軌跡相交於兩點 B_1、B_2,得到兩個全等的 $\triangle AB_1C$ 和 $\triangle AB_2C$ 滿足條件,所以 $D2$ 可以成爲判定定理.

$D3$:給定 $\angle B$、AC 和 $\angle B$ 的角平分線 BD.

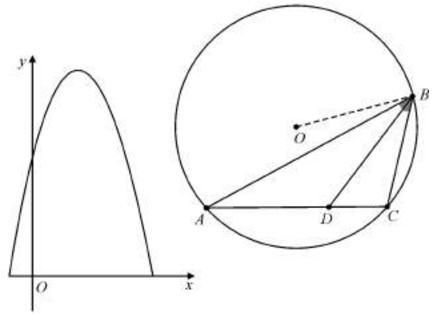
【解】先作 AC 和對着 AC 形成 $\angle B$ 大小的圓弧. 當 B 由 C 運動到 A 時,作以 OB 與水平向右的方向所成的夾角爲橫坐標,以 BD 的長爲縱坐標的點的圖像,其爲 $D3$ 圖中的開口向下的對稱曲線. 由圖像的對稱性我們知道,有兩個 $\triangle ABC$ 滿足條件,但他們是全等的,所以 $D3$ 可以成爲判定定理.



D1 圖



D2 圖



D3 圖

$E1$:給定 $\angle B$、AC 和 AB 邊的中線 CD.

【解】當 B 由 C 運動到 A 時,AB 中點 D 的軌跡是 $E1$ 圖中下面兩個小圓中左邊那個在線段 AC 上的部分,其與以 C 爲圓心,CD 長爲半徑的圓可能有 2 個交點,所以可能有兩個 $\triangle ABC$ 滿足條件,而且他們不全等,所以 $E1$ 不能成爲判定定理.

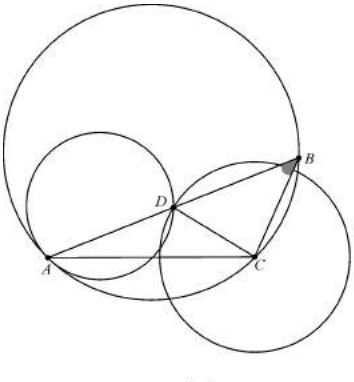
$E2$:給定 $\angle B$、AC 和 AB 邊上的高線 CD.

【解】先作 $\triangle ADC(HL)$,再作 $\triangle BDC$ 使得 $\angle B$ 等於給定角. 這樣得到的 $\triangle ABC$ 唯一,所以 $E2$ 可以成爲判定定理.

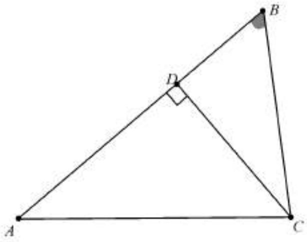
$E3$:給定 $\angle B$、AC 和 $\angle C$ 的角平分線 CD.

【解】當 B 由 C 運動到 A 時,AB 與角平分線 CD 的交點 D 的軌跡是 $E3$ 圖中的梨狀的圖形在線段 AC 上的部分,其與以 C 爲圓心,CD 長爲半徑的圓可能有 2 個交點,所以可能有兩

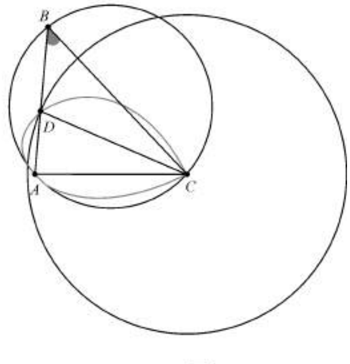
個 $\triangle ABC$ 滿足條件,而且他們不全等,所以 $E3$ 不能成爲判定定理.



E1 圖



E2 圖



E3 圖

$F1$:給定 AB、BC 和 BC 邊的中線 CD.

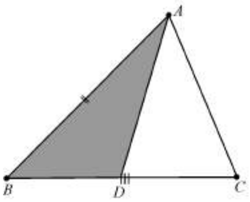
【解】先作 $\triangle ABD(SSS)(BD = \frac{1}{2}BC)$,再連 AC 即得 $\triangle ABC$,所以 $F1$ 可以成爲判定定理.

$F2$:給定 AB、BC 和 BC 邊上的高線 AD.

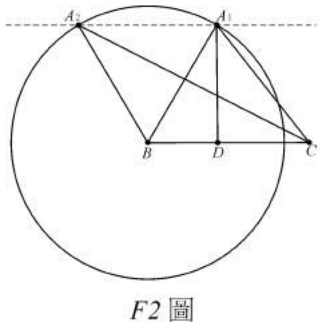
【解】與 BC 平行,且到 BC 的距離與高線 AD 等長的直線,與以 B 爲圓心、AB 長爲半徑的圓相交於兩點 A_1、A_2,得到兩個不全等的 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 滿足條件,所以 $F2$ 不能成爲判定定理.

$F3$:給定 AB、BC 和 $\angle A$ 的角平分線 AD.

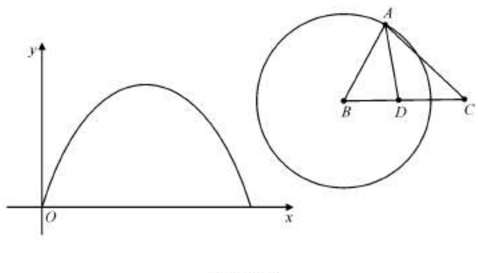
【解】先作 BC 和以 B 爲圓心、AB 長爲半徑的圓. 當 A 從該圓與 BC 的交點逆時針繞 B 一圈時,以 AB 與水平向右的方向所成的角爲橫坐標,以 AD 的長爲縱坐標作點,該點的圖像爲 $F3$ 圖中的紅線. 由圖像的對稱性我們知道,有兩個 $\triangle ABC$ 滿足條件,但他們是全等的,所以 $F3$ 可以成爲判定定理.



F1 圖



F2 圖



F3 圖

$G1$:給定 AB、BC 和 AC 邊的中線 BD.

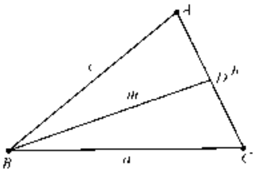
【解】對這一情況,我們用解三角形的方法. 當我們分別記 $\angle A$、$\angle B$ 和 $\angle C$ 的對邊爲 a、b、c, $BD = m$ 時,由 $\angle ADB + \angle CDB = 180°$ 及餘弦定理,我們不難得到 $2m^2 + \frac{1}{2}b^2 + a^2 - c^2 = 0$. 這個關於 b 的二次方程有互爲相反數的兩個根,取正. 所以滿足條件的 $\triangle ABC$ 唯一,$G1$ 可以成爲判定定理.

$G2$：給定 AB、BC 和 AC 邊上的高線 BD.

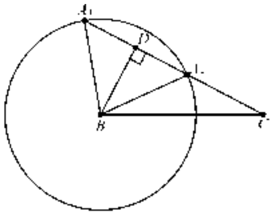
【解】先作 $\triangle CBD(HL)$，再以 B 爲圓心、AB 長爲半徑作圓，其與 CD 可能有兩個交點 A_1、A_2，得到兩個不全等的 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 滿足條件，所以 $G2$ 不能成爲判定定理.

$G3$：給定 AB、BC 和 $\angle B$ 的角分線 BD.

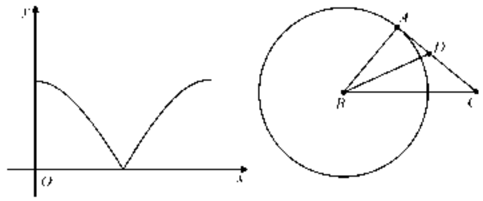
【解】先作 BC 和以 B 爲圓心、AB 長爲半徑的圓. 當 A 從該圓與 BC 的交點逆時針繞 B 一圈時，以 AB 與水平向右的方向所成的角爲橫坐標，以 BD 的長爲縱坐標作點，該點的圖像爲 $G3$ 圖中的紅線。由圖像的對稱性我們知道，有兩個 $\triangle ABC$ 滿足條件，但他們是全等的，所以 $G3$ 可以成爲判定定理.



G1 圖



G2 圖



G3 圖

$H1$：給定 $\angle B$、$\angle C$ 和 AB 邊的中線 CD.

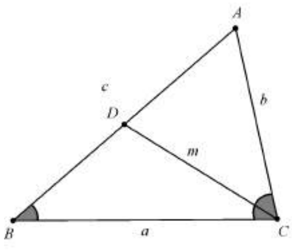
【解】對這一情況，我們用解三角形的方法. 由三角形內角和定理，可以求出 $\angle A$，進而能得到 $a:b:c$，這裏有 $2m^2 + \frac{1}{2}c^2 - a^2 - b^2 = 0$. 這個關於 a、b、c 的二次方程只有一組滿意條件的正確，所以 $\triangle ABC$ 唯一，$H1$ 可以成爲判定定理.

$H2$：給定 $\angle B$、$\angle C$ 和 AB 邊上的高線 CD.

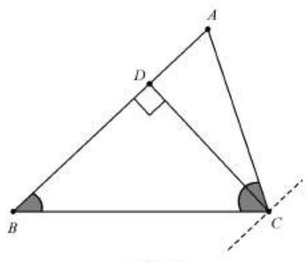
【解】先作 $\triangle BCD$，再作 $\angle BCA$，CA 與 BD 的交點爲 A，所以 $H2$ 可以成爲判定定理.

$H3$：給定 $\angle B$、$\angle C$ 和 $\angle ACB$ 的角平分線 CD.

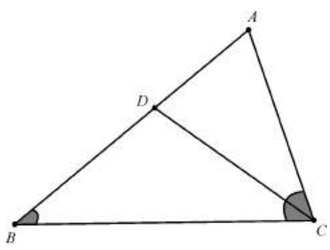
【解】先作 $\triangle BCD(AAS)\left(\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BCA\right)$，再作 $\angle BCA$，CA 與 BD 的交點爲 A，所以 $H3$ 可以成爲判定定理.



H1 圖



H2 圖



H3 圖

$I1$：給定 $\angle B$、$\angle C$ 和 BC 邊的中線 AD.

【解】這種情況與 $H1$ 類似，只是這裏 a、b、c 和 m 的關係是 $2m^2 + \frac{1}{2}a^2 - b^2 - c^2 = 0$. 所以

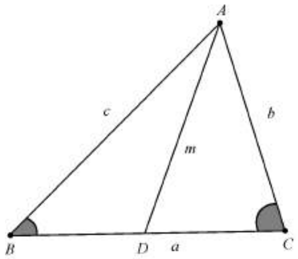
$I1$ 可以成爲判定定理.

$I2$:給定 $\angle B$、$\angle C$ 和 BC 邊上的高線 AD.

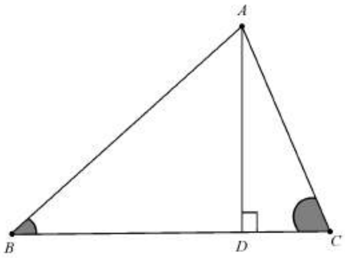
【解】先作 $\triangle ABD(AAS)$,再作 $\angle BCA$ 以確定 C 點,所以 $I2$ 可以成爲判定定理.

$I3$:給定 $\angle B$、$\angle C$ 和 $\angle BAC$ 的角平分線 AD.

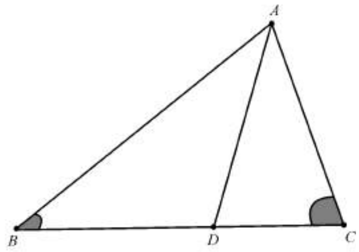
【解】由三角形內角和定理,先求 $\angle A$,進而作出 $\triangle ABD(AAS)$,再作 $\angle BCA$ 以確定 C 點,所以 $I3$ 可以成爲判定定理.



$I1$ 圖



$I2$ 圖



$I3$ 圖

事實上,這裏最後的六種情況,有兩角對應相等的三角形全相似,所以只需對這些三角形進行放大或縮小,使其對應的中線、高、角分線長度與給定條件相等. 上面我們詳細討論了滿足條件三角形的尺規作圖.

三、思路總結

對這 27 種情形的討論,我們分別用到了作圖法、軌跡法、函數法和解三角形的方法,得到其中的$\frac{2}{3}$能成爲判斷定理(表 3). 現在的問題是,什麼時候用軌跡法?什麼時候用函數法?作圖法要用到一些常見的軌跡,如 $B2$ 中點 A 的軌跡是平行於 BC 的直線. 軌跡法好像適用於能根據軌跡與圖形中給定的元素相交確定交點的情況. 在這裏,函數法全用在研究角平分線的問題中,角平分線所在的角的頂點確定其與對邊的交點,但反過來,給定其與對邊的交點,卻很難確定對應的角的頂點,在這種情形下,我們用函數法. 當然有些作圖法能解決的問題也可以用函數法,如 $D2$,我們可以像研究 $D3$ 一樣使用函數法.

表 3　四種思路:

	解題方法	情況編號
1	作圖法	$A1$、$A2$、$A3$、$B1$、$\underline{B2}$、$\underline{C2}$、$\underline{C3}$、$\underline{D1}$、$\underline{D2}$、$\underline{E2}$、$\underline{F1}$、$F2$、$G2$、$\underline{H2}$、$\underline{H3}$、$\underline{I2}$、$\underline{I3}$
2	軌跡法	$C1$、$E1$、$E3$
3	函數法	$\underline{B3}$、$\underline{D3}$、$\underline{F3}$、$\underline{G3}$
4	解三角形法$\underline{G1}$、$\underline{H1}$、$\underline{I1}$	

注:下面帶橫線的都是可以成爲判定定理的那些組合.

最後,應該指出的是,超級畫板的使用,方便了問題的探究(特別是軌跡法和函數法).超級畫板的動態性方便了圖形的變換,如在$B3$中,我們可以很容易地改變給定的$\angle B$大小,研究其爲鋭角和鈍角的情形;在$D3$中,我們可以把B點移到AC的下方,觀察$\angle B$爲鈍角的情形. 超級畫板的跟蹤和軌跡功能,讓我們能很順利地作出函數關係,觀察函數的單調性和對稱性,從而得出合理的推斷.

參考文獻

[1] 江春蓮. (2013). 三角形全等條件的進一步研究. 載澳門數學研究學會編:《澳門數學教育十年論文選輯(第二輯)》(汪甄南主編)($P215-220$).

“用絕對值的幾何解釋解題”之典型範例分析

澳門數學教育研究學會　鄭志民

一、實數的絶對值之幾何意義(幾何解釋)

實數 x 的絕對值用 $|x|$ 表示,其意義是:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad 或 |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ 的幾何意義(幾何解釋):

實數 x 在數軸 ox 上對應的點 A(或 B)到原點 O 的距離 $\overline{OA}$(或 $\overline{OB}$)稱為實數 x 的絶對值.

二、“用絶對值的幾何解釋解題”之典型案例分析

含有絕對值符號的代數式,代數方程(組),代數不等式以及代數函數並非常規的代數式,代數方程(組),代數不等式以及代數函數. 因此,解此類題目時要另辟蹊路,其關鍵是“設法去掉絕對值符號”,使其回歸常規. 這就要用到“分類討論”的數學思想方法. 但用“分類討論”的數學思想方法去掉絕對值符號解題時,解題過程往往極爲煩雜. 不少題目若用絕對值的幾何解釋解題,則往往可取事半功倍之效,甚至有驚喜之舉,令人拍案叫絕!

下述幾個典型案例之分析可供大家欣賞,借鑒,特別是〔例 3〕至〔例 10〕各例中的最後一種解法更可以體現**“用絶對值的幾何解釋解題”**之威力!

〔**例** 1〕若 a、b、c 均不爲 0,試利用絕對值的意義求 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$ 之值.

〔**思考**〕本例解題的攔路虎是“絕對值”符號,如何去掉絕對值符號,便是解答問題的關鍵. 爲此,指道學生“退一步”,先研究 $\frac{a}{|a|}$ 的值.

〔**解**〕當 $a > 0$ 時, $\frac{a}{|a|} = \frac{a}{a} = 1$;當 $a < 0$ 時, $\frac{a}{|a|} = \frac{a}{-a} = -1$.

告訴學生,數學家華羅庚先生曾經指出,<u>“善於‘退’,足夠地‘退’,‘退’到最原始而不失去重要性的地方,是學生學習數學的一個訣竅!”—— 以退求進!</u>

求出$\frac{a}{|a|}$之值後,鼓勵學生順藤摸瓜,按照上述求$\frac{a}{|a|}$時所運用的"分類討論"的數學思想方法,便可以"進一步"求出$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$的值.

當 $a>0$,且 $b>0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}=1+1=2$;

當 $a>0$,且 $b<0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{-b}=1-1=0$;

當 $a<0$,且 $b>0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{b}=-1+1=0$;

當 $a<0$,且 $b<0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}=-1-1=-2$.

進而鼓勵學生,一鼓作氣,再用"分類討論"的方法,求出$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$的值.

(1) 若 $a>0, b>0$,且 $c>0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}=1+1+1=3$;

(2) 若 $a>0, b>0$,且 $c<0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{-c}=1+1-1=1$;

若 $a<0, b>0$,且 $c>0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}=-1+1+1=1$;

若 $a>0, b<0$,且 $c>0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{c}=1-1+1=1$;

(3) 若 $a>0, b<0$,且 $c<0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}=1-1-1=-1$;

若 $a<0, b>0$,且 $c<0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{-c}=-1+1-1=-1$;

若 $a<0, b<0$,且 $c>0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{c}=-1-1+1=-1$;

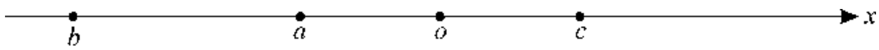
(4) 若 $a<0, b<0$,且 $c<0$ 時,$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}=-1-1-1=-3$;

針對不同層次的學生,本題可改爲求$\frac{a}{|a|}$或求$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$之值. 對於高水準的學生,又可以進一步提出求$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{d}{|d|}$之值. 甚至可以提出探求$\frac{a_1}{|a_1|}+\frac{a_2}{|a_2|}+\frac{a_3}{|a_3|}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{|a_{n-1}|}+\frac{a_n}{|a_n|}$之值的問題,這也是分層教學所需要的.

上述解法的探求中,<u>滲透了"分類討論"的數學思想的運用,也運用了"以退為進","順藤摸瓜"的思維方法</u>,有利於培養學生分析問題,解決問題的能力.

用"分類討論"思想,結合"退一步,進一步"的"戰術",解含絶對值的數學問題,極為漂亮!

〔**例** 2〕若 a、b、c 在數軸上的對應點如下圖所示,且有 $|a| = |c|$,試求 $|a| - |a+b| + |c-b| + |a+c|$ 的值.



〔**解**〕據已知,$a < 0, b < 0, c > 0$,且 $|a| = |c|$,

$\therefore a + b < 0, c - b > 0, a + c = 0$,

$\therefore\ |a| - |a+b| + |c-b| + |a+c|$

$= -a - [-(a+b)] + (c-b) + 0 = -a + a + b + c - b = c.$

〔**例** 3〕解含絕對值的不等式.

① 解不等式 $|x-3| < 5$.

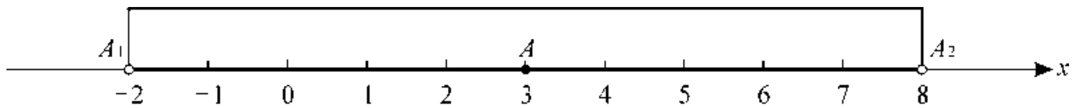
〔**解法一**〕$\because\ |x-3| < 5$,

$\therefore\ -5 < X - 3 < 5$,

$\therefore\ -2 < X < 8$,即 $(-2, 8)$ 爲原不等式的解集.

〔**解法二**〕$\because\ |x-3| < 5$,

以 3 在數軸上的對應點 A 爲圓心,以 5 爲半徑畫孤交數軸於點 A_1(向數軸的左方退後 5)(表示數 -2)和 A_2(向數軸的右方前進 5)(表示數 8).



在數軸 ox 上,線段 A_1A_2(不包括 A_1 和 A_2 兩點)上所有點所表示的實數均爲原不等式的解.

由上圖可得,原不等式的解集爲 $-2 < x < 8$,即 $(-2, 8)$.

〔**說明**〕**$|x-3|$ 可理解為,實數 x 在數軸 ox 上所表示的點 A_1(或 A_2)到實數 3 在數軸 ox 上所表示的點 A 的距離,即 $|x-3|$ 的幾何意義(幾何解釋).**

上述的解法便是"利用絶對值的幾何解釋解題"的典型案例之一,其簡捷之處,令人感歎不已.

② 解不等式 $\left|\dfrac{1-3x}{2}\right| \geq 2$.

〔**解法一**〕$\because\ \left|\dfrac{1-3x}{2}\right| \geq 2$,

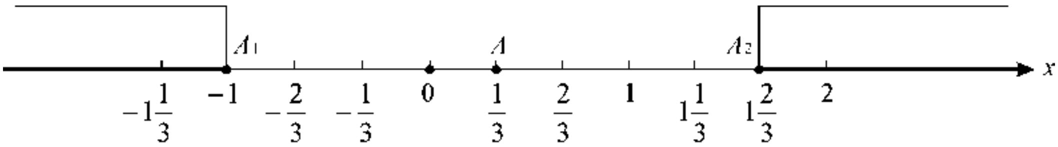
$\therefore\ \dfrac{1-3x}{2} \leq -2$,或 $\dfrac{1-3x}{2} \geq 2$ 即 $3x \leq -3$ 或 $3x \geq 5$,

$\therefore x \leq -1$ 或 $x \geq 1\dfrac{2}{3}$ 爲不等式的解,也即 $(-\infty, -1] \cup \left[1\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ 爲原不等式的解集.

〔**解法二**〕$\because\ \left|\dfrac{1-3x}{2}\right| \geq 2$,

$\therefore\ \left|\dfrac{3x-1}{2}\right| \geq 2$, $|3x-1| \geq 4$, $\left|x-\dfrac{1}{3}\right| \geq \dfrac{4}{3}$,即$\left|x-\dfrac{1}{3}\right| \geq 1\dfrac{1}{3}$.

以$\dfrac{1}{3}$在數軸 ox 上的對應點 A 爲圓心,以 $1\dfrac{1}{3}$ 爲半徑畫弧交數軸於點 A_1(向數軸的左方退後 $1\dfrac{1}{3}$)(表示數 -1) 和 A_2(向數軸右方前進 $1\dfrac{1}{3}$)(表示數 $1\dfrac{2}{3}$).



$\therefore$ 在數軸 ox 上,線段 A_1A_2 外的兩條射線(包括點 A_1 和點 A_2) 上的所有點所表示的實數均爲原不等式的解.

由上圖可得,原不等式的解集爲 $x \leq -1$ 或 $x \geq 1\dfrac{1}{3}$ 即$(-\infty, -1] \cup 1\left[1\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

③ **解不等式** $2 \leq |2x-3| < 5$.

〔**解法一**〕由不等式可得不等式組 $\begin{cases} |2x-3| < 5, \\ |2x-3| \geq 2. \end{cases}$

即$\begin{cases} -5 < 2x-3 < 5, \\ 2x-3 \leq -2 \text{ 或 } 2x-3 \geq 2. \end{cases}$

由此,又可得兩個不等式組:①$\begin{cases} -5 < 2x-3 < 5, \\ 2x-3 \leq -2; \end{cases}$或 ②$\begin{cases} -5 < 2X-3 < 5, \\ 2X-3 \geq 2. \end{cases}$

解不等式組 ① 可得: $-1 < x \leq \dfrac{1}{2}$,

解不等式組 ② 可得:$2\dfrac{1}{2} \leq x < 4$.

$\therefore$ 原不等式的解集爲 $-1 < x \leq \dfrac{1}{2}$ 或 $2\dfrac{1}{2} \leq x < 4$,也即$\left(-1, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[2\dfrac{1}{2}, 4\right)$.

〔**解法二**〕由 $2 \leq |2x-3| < 5$ 可知

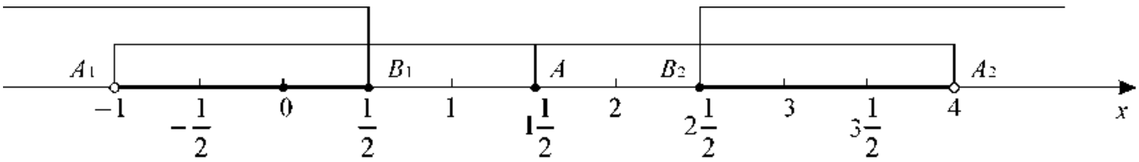
(1) 當 $2x-3 \geq 0$ 時,$2 \leq 2x-3 < 5$, $\therefore 2\dfrac{1}{2} \leq x < 4$.

(2) 當 $2x-3 < 0$ 時,$2 \leq -(2x-3) < 5$, $\therefore\ -1 < x \leq \dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 原不等式的解集爲 $-1 < x \leq \dfrac{1}{2}$ 或 $2\dfrac{1}{2} \leq x < 4$, 也即$\left(-1, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[2\dfrac{1}{2}, 4\right)$.

〔**解法三**〕不等式 $2 \leq |2x-3| < 5$ 可化爲 $1 \leq \left|x - 1\dfrac{1}{2}\right| < 2\dfrac{1}{2}$.

以 $1\frac{1}{2}$ 在數軸 ox 上的對應點 A 爲圓心，以 $2\frac{1}{2}$ 爲半徑畫弧交數軸於點 A_1（向數軸的左方退後 $2\frac{1}{2}$）（表示數 -1）和 A_2（向數軸的右方前進 $2\frac{1}{2}$）（表示數 4）. 再以 A 爲圓心，以 1 爲半徑畫弧交數軸於另外兩點，包括點 B_1（向數軸左方退後 1）（表示數 $\frac{1}{2}$）和點 B_2（向數軸右方前進 1）（表示數 $2\frac{1}{2}$）.



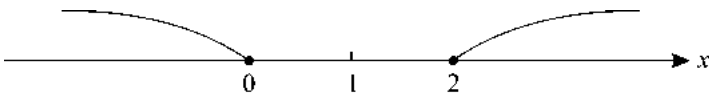
在數軸 ox 上，線段 A_1B_1（包括點 B_1，但不包括點 A_1）和線段 B_2A_2（包括點 B_2，但不包括點 A_2）上所有點所對應的實數均爲不等式的解.

由上圖可得，原不等式的解集爲 $-1 < x \leq \frac{1}{2}$ 或 $2\frac{1}{2} \leq x < 4$，也即 $\left(-1,\frac{1}{2}\right] \cup \left[2\frac{1}{2},4\right)$.

〔**例 4**〕解方程：①$|x| = |x-2|$；②$|x-2| - |x-8| = 1$.

①〔**解法一**〕由 $x = 0$ 和 $x = 2$ 可得三個不等式：

$$x < 0, 0 \leq x \leq 2 \text{ 和 } x > 2.$$



i）當 $x < 0$，原方程可化爲

$$-x = -(x-2), 0 = 2 \text{（無解）}.$$

ii）當 $0 \leq x \leq 2$ 時，原方程可化爲

$$x = -(x-2), 2x = 2, x = 1.$$

iii）當 $x > 2$ 時，原方程可化爲

$$x = x - 2, 0 = -2, \text{（無解）}.$$

綜上所述，原方程的解爲 $x = 1$.

〔**解法二**〕由 $|x| = |x-2|$ 兩邊平方，可得

$$x^2 = (x-2)^2, x^2 = x^2 - 4x + 4.$$

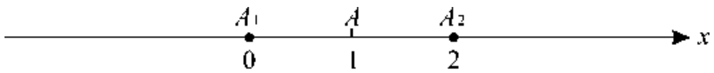
$\therefore 4x = 4, x = 1$.

經檢驗知，$x = 1$ 是原方程的解.

〔**解法三**〕$\because |x| = |x-2|$.

因此方程的解 x 在數軸上對應的點 A 是使它與表示實數 0 的點 A_1 及表示實數 2 的點 A_2 的距離相等的點. 這種點顯然是線段 A_1A_2 的中點.

故 $x = \frac{0+2}{2} = 1.$

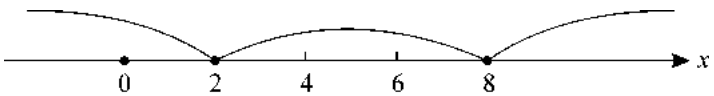


因此原方程的解爲 $x = 1.$

[**注**]① 之〔**解法三**〕用**"絶對值的幾何解釋"** 解方程,顯得特别簡便、直觀.

②〔**解法一**〕由 $x-2=0$ 和 $x-8=0$ 可得三個不等式:

$$x < 2, 2 \leq x \leq 8 \text{ 和 } x > 8.$$



i)當 $x<2$ 時,原方程可化爲

$$-(x-2)+(x-8)=1,\ -6=1.(\text{無解}).$$

ii)當 $2 \leq x \leq 8$ 時,原方程可化爲

$$x-2+(x-8)=1, x=5\frac{1}{2}.$$

iii)當 $x>8$ 時,原方程可化爲

$$(x-2)-(x-8)=1, 6=1(\text{無解}).$$

$\therefore$ 原方程的解爲 $x=5\frac{1}{2}.$

〔**解法二**〕$\because |x-2|-|x-8|=1, \therefore |x-2|=|x-8|+1.$

方程兩邊平方,可得

$$(x-2)^2=[|x-8|+1]^2,$$

$$x^2-4x+4=(x-8)^2+2|x-8|+1,$$

$\therefore$
$$|2x-6|=2|x-8|.$$

兩邊平方,得

$$(12x-61)^2=4(x-8)^2,$$

即
$$4x^2-40x+99=0, (2x-11)(2x-9)=0.$$

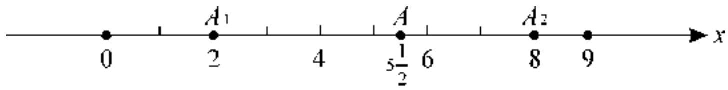
$\therefore x_1=5\frac{1}{2}, x_2=4\frac{1}{2}.$

經檢驗知,$x_1=5\frac{1}{2}$ 是原方程的解,$x_2=4\frac{1}{2}$ 是原方程的增根.

$\therefore$ 原方程的解爲 $x=5\frac{1}{2}.$

〔**解法三**〕$\because |x-2|-|x-8|=1$,即 $|x-2|=|x-8|+1.$

因此,方程的解 x 在數軸上對應的點 A 是使它與表示實數 2 的點 A_1 及表示實數 8 的點 A_2 的距離與 1 之和的點 A_3 距離相等的點. 顯然,這種點是線段 A_1A_3 的中點,故 $x=\frac{2+9}{2}=5\frac{1}{2}.$



［注］顯然②之〔**解法三**〕用**“絶對值的幾何解釋”**解方程，顯得特別簡捷、直觀.

〔**例 5**〕解方程 $|x-1|+|x-2|=1$.

〔**解法一**〕由 $|x-1|=0$，及 $|x-2|=0$，得 $x=1$，及 $x=2$.

將方程中 x 的取值範圍分成三個區間：$(-\infty,1]$，$(1,2]$ 和 $[2,+\infty)$.

(1) 當 $x\le 1$ 時，即 $x\in(-\infty,1]$ 時，原方程可化爲

$$-(x-1)-(x-2)=1,\ 即\ x=1.$$

因爲 $1\in(-\infty,1]$，所以 $x=1$ 是原方程的解.

(2) 當 $1<x\le 2$ 時，即 $x\in(1,2]$，原方程可化爲

$$x-1-(x-2)=1,即\ 1=1.$$

因此，x 可以是 $(1,2]$ 上的任意實數值，也即 $1<x\le 2$ 中的任何一實數 x 的值都是方程的解.

(3) 當 $x\ge 2$ 時，即 $x\in[2,+\infty)$ 時，原方程可化爲

$$x-1+(x-2)=1,即\ x=2.$$

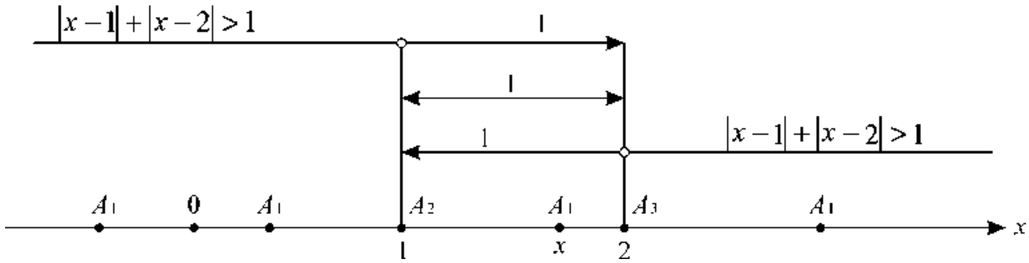
因爲 $2\in[2,+\infty)$. ，所以 $x=2$ 是原方程的解.

綜合(1)，(2)，(3)可知，$[1,2]$ 上的一切實數值都是原方程的解.

〔**解法二**〕$\because\ |x-1|+|x-2|=1$，

$\therefore$ 數軸上表示實數 x 之點 A_1 與數軸上表示實數 1 之點 A_2 的距離加上點 A_1 與數軸上表示實數 2 之點 A_3 的距離之和等於 1 的點不可能在數軸 ox 上線段 A_2A_3（包括點 A_2 和點 A_3）之外 的 A_1 處（否則 $|x-1|+|x-2|>1$），而只能在數軸 ox 上線段 A_2A_3 之上（包括點 A_2 和點 A_3）.

因此原方程的解爲 $1\le x\le 2$，即 $x\in[1,2]$.



〔**例 6**〕解方程 $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.

〔**解法一**〕由 $x-2=0$，$x-3=0$，$2x-8=0$，解得

$$x_1=2,x_2=3,x_3=4.$$

(1) 當 $x \le 2$ 時,原方程可化爲

$$(2 - x) + (3 - x) + (8 - 2x) = 9.$$

解之,得 $x = 1$.

考慮 $x \le 2$, $\therefore x = 1$ 是原方程的解.

(2) 當 $2 \le x \le 3$ 時,原方程可化爲

$$(x - 2) + (3 - x) + (8 - 2x) = 9.$$

解之,得 $x = 0$.

考慮到 $2 \le x \le 3$, $\therefore x = 0$ 不是原方程的解.

(3) 當 $3 \le x \le 4$ 時,原方程可化爲

$$(x - 2) + (x - 3) + (8 - 2x) = 9, 3 = 9, (矛盾).$$

顯然,此時原方程無解.

(4) 當 $x \ge 4$ 時,原方程可化爲

$$(x - 2) + (x - 3) + (2x - 8) = 9.$$

即 $4x = 22$, $x = \frac{11}{2}$(即 $x = 5\frac{1}{2}$).

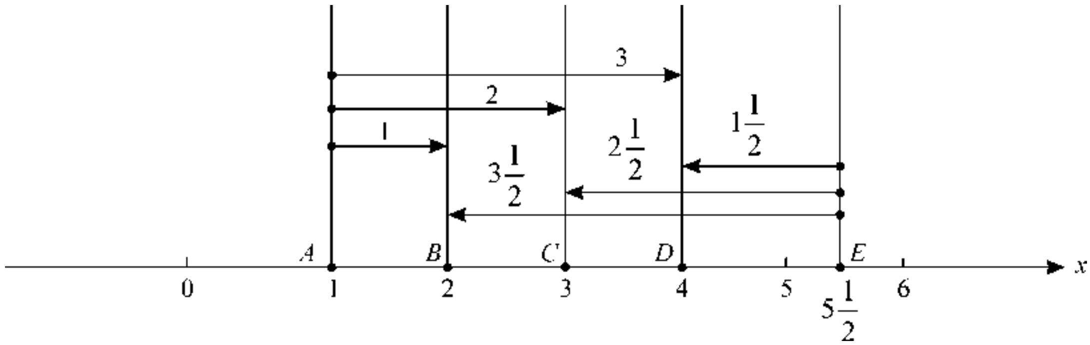
考慮到 $x \ge 4$, $\therefore x = 5\frac{1}{2}$ 是原方程的解.

綜合(1),(2),(3) 可知,原方程的解爲 $x = 1$ 和 $x = 5\frac{1}{2}$.

〔**解法二**〕$\because |x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$.

$\therefore |x - 2| + |x - 3| + 2|x - 4| = 9$.

$\therefore$ 在數軸 ox 上表示實數 1 的點 A 與表示實數 2 的點 B 的距離,點 A 與表示實數 3 的點 C 的距離,以及點 A 與表示實數 D 的距離之兩倍,這三者之和等於 9.



在數軸 ox 上表示實數 $5\frac{1}{2}$ 的點 E 與表示實數 2 的點 B 的距離,點 E 與表示實數 3 的點 C 的距離,以及點 E 與表示實數 4 的點 D 的距離之兩倍,這三者之和等於 9.

但符合方程的實數 所對應的點不可能在數軸 ox 上的線段 AD(不包括點 A) 之左側的射線上的任意點(此時上述的三者之和大於 9),也不可能在數軸 ox 上的線段 BE(不包括點 E) 之右側的射線上的任意點(此時上述三者之和也大於 9),而且也不可能在數軸 ox 上的

線段 AE（不包括點 A 和點 E）上的任意點（此時三數之和小於9）.

$\therefore$ 原方程的根爲 $x_1=1, x_2=\frac{11}{2}$（即 $x_1=1, x_2=5\frac{1}{2}$）.

〔例7〕解不等式 $|x-4|-|x+2|\geq 0$.

〔**解法一**〕由 $x-4=0$ 及 $x+2=0$ 時，分別得 $x=4$ 及 $x=-2$，於是有區間 $(-\infty,-2)$，$[-2,4)$，和 $[4,+\infty)$.

(1) 當 $x<-2$，即 $x\in(-\infty,-2)$ 時，原不等式變爲

$$4-x+x+2\geq 0, \text{即} 6\geq 0.$$

即當 $x<-2$ 時，不等式恆成立.

故滿足 $x<-2$ 的任意實數均爲原不等式的解.

(2) 當 $-2\leq x<4$ 時，原不等式變爲

$$4-x-(x+2)\geq 0,$$

即 $2-2x\geq 0$，解之得 $x\leq 1$.

故 $-2\leq x\leq 1$ 爲原不等式的解集.

(3) 當 $x\geq 4$ 時，原不等式變爲

$$x-4-x-2\geq 0,$$

即 $-6\geq 0$，無解.

綜合(1)，(2)，(3) 可知，不等式的解爲滿足 $x\leq 1$ 的任意實數.

〔**解法二**〕原不等式可化爲 $|x-4|\geq|x+2|$.

兩邊平方，得 $x^2-8x+16\geq x^2+4x+4$，

即 $12\geq 12x$，也即 $x\leq 1$.

故原不等式的解爲滿足 $x\leq 1$ 的任意實數.

經檢驗知，滿足 $x\leq 1$ 的任意實數是原不等式的解.

〔**解法三**〕$\because |x-4|-|x+2|\geq 0$，$\therefore |x-4|\geq|x+2|$，

$\therefore -|x-4|\leq x+2\leq|x-4|$，

也即 $\begin{cases}x+2\leq|x-4|,\\ x+2\geq-|x-4|.\end{cases}$

當 $x>4$ 時，有 $\begin{cases}x+2\leq x-4,\\ x+2\geq-(x-4),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6\leq 0,\\ x\geq 1.\end{cases}$（無解）.

當 $x\leq 4$ 時，有 $\begin{cases}x+2\leq-(x-4),\\ x+2\geq-(4-x),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\leq 1,\\ 6\geq 0.\end{cases}$ 則 $x\leq 1$.

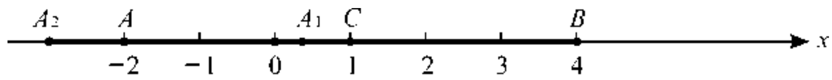
$\therefore$ 原不等式的解爲滿足 $x\leq 1$ 的任意實數.

〔**解法四**〕原不等式可化爲 $|x-(-2)|\leq|x-4|$.

此不等式的解 x 是數軸上表示數 -2 的點 A 的左邊的所有點 A_2（包括點 A）和數軸上線

段 AC（C 爲線段 AB 的中點）間的所有點 A_1（包括點 A 和點 C）到數軸上表示實數 -2 的點 A 的距離所表示的實數都小於或等於點 A_1（或 A_2）到數軸上表示實數 4 的點 B 的距離所表示的實數.

如下圖所示，可知到表示實數 -2 的點 A 的距離和到表示實數 4 的點 B 的距離相等的點正好是線段 AB 的中點 C，因此點 C 所對應的實數 $x=\dfrac{4+(-2)}{2}=1$.



由此可知，在數軸上表示實數 1 的點 C 的左邊的所有點 A_1（包括點 C）或 A_2（包括點 A）到表示實數 -2 的點 A 的距離都小於或等於 A_1 或 A_2 到表示數 4 的點 B（包括點 B）的距離.

原不等式的解爲滿足 $x \leq 1$ 的任何實數.

＊ 顯然，本題之〔解法四〕的解法最為簡單、易懂，正好顯示了"用絶對的幾何解釋解題"的優越性.

〔**例 8**〕解不等式 $\big||x+3|-|x-3|\big|>3$.

〔**解法一**〕原不等式與下面三個不等式同解：

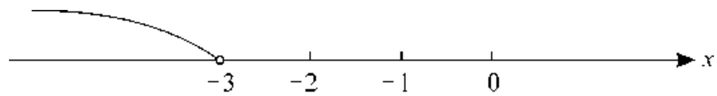
（Ⅰ）$\begin{cases} x<-3, \\ |-(x+3)+(x-3)|>3; \end{cases}$

（Ⅱ）$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ |(x+3)+(x-3)|>3; \end{cases}$

（Ⅲ）$\begin{cases} x>3, \\ |(x+3)-(x-3)|>3. \end{cases}$

① 將不等式組（Ⅰ）變形爲 $\begin{cases} x<-3, \\ |-6|>3. \end{cases}$

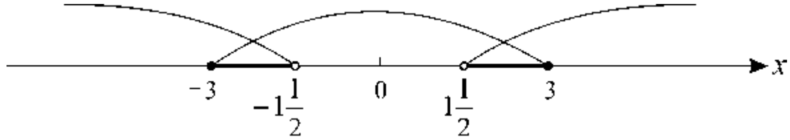
由此可得 $x<-3$.



② 將不等式組（Ⅱ）變形爲 $\begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ |2x|>3. \end{cases}$

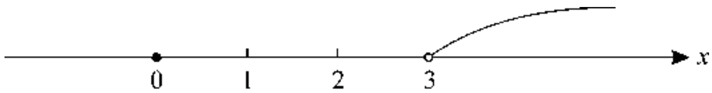
解這個不等式組，得

$$-3 \leq x<-1\frac{1}{2} \text{ 或 } 1\frac{1}{2}<x \leq 3.$$



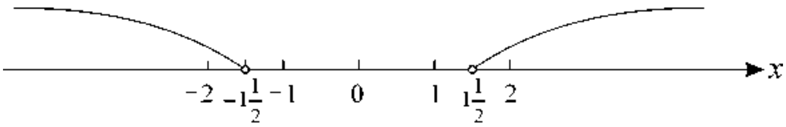
② 將不等式組(Ⅲ)變形爲$\begin{cases} x > 3, \\ 6 > 3. \end{cases}$

由此可得　$x > 3$.



綜合 ①,② 和 ③ 可知,原不等式的解爲

$$x < -1\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\frac{1}{2}.$$



〔**解法二**〕∵ $\big| |x+3| - |x-3| \big| > 3$,因此將原不等式兩邊平方,可得

$$[\,|x+3| - |x-3|\,]^2 > 9,$$

整理,得 $2x^2 + 9 > 2|(x+3)(x-3)|$.

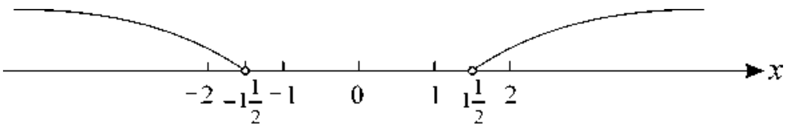
兩邊平方,得

$$(2x^2+9)^2 > [2(x^2-9)]^2,$$

整理,得　　$$(x+\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2}) > 0,$$

∴　　$$x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\frac{1}{2}.$$

經檢驗知,$x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 1\frac{1}{2}$ 均爲不等式的解.

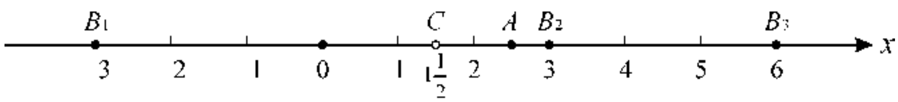


〔**解法三**〕原不等式可化爲:

$$|x+3| - |x-3| > 3 \text{ 或 } -(|x+3| - |x-3|) > 3,$$

即　　(Ⅰ)$|x+3| > |x-3| + 3$ 或(Ⅱ)$|x-3| > |x+3| + 3$.

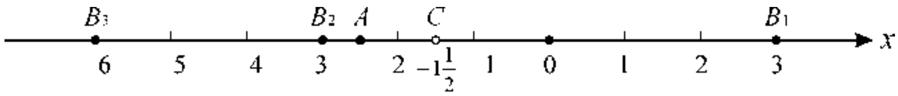
不等式(Ⅰ)的解 x 在數軸上所表示的點 A 是使它與表示實數 -3 的點 B_1 的距離**大於**點 A 與表示實數 3 的點 B_2 的距離加 3,而這兩個實數之和在數軸上所表示的點是 B_3. 顯然,符合這種要求的點是數軸上線段 B_1B_3 的中點 C(表示實數 $1\frac{1}{2}$)(不包括 C 點)的右邊的所有點.



因此,不等式(Ⅰ)的解爲 $x > 1\frac{1}{2}$.

不等式(Ⅱ)的解 x 在數軸上對應的點 A 是使它與表示實數 3 的點 B_1 的距離**大於**點 A 與

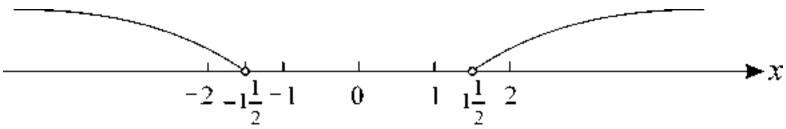
表示實數 -3 的點 B_2 的距離加3,而這兩個實數之和在數軸上所表示的點是 B_3. 顯然,符合這種要求的點是數軸上線段 B_3B_1 的中點 C(不包括 C 點)的左邊的所有點.



因此,不等式(Ⅱ)的解爲 $x < -1\frac{1}{2}$.

綜合(Ⅰ)和(Ⅱ),可知原不等式的解爲

$$x < -1\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\frac{1}{2}.$$



〔**例**9〕已知 $a < b < c$, x 代表實數,求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值(1988年,上海市數學競賽初三級試題).

設 $y = |x-a|+|x-b|+|x-c|$,則求 y 的最小值的攔路虎是絕對值符號,去掉絕對值符號便是解題的關鍵 —— 學生都同意這一觀點,因此(除個別學生外)都有如下的解法:

先把"|　|"號打開,這時,根據實數絕對值的定義得到:

$$y=\begin{cases} -x+a-x+b-x+c=-3x+a+b+c(x\le a), & ① \\ x-a-x+b-x+c=-x-a+b-c(a<x\le b), & ② \\ x-a+x-b-x+c=x-a-b+c(b<x\le c), & ③ \\ x-a+x-b+c-c=3x-a-b-c(x>c), & ④ \end{cases}$$

由於 $x \le a$, x 的係數爲負數(-3),① 式的最小值在 $x = a$ 時取得,

① 式值 $\ge -2a+b+c = c-a+b-a > c-a$.

由於 $x \le b$, x 的係數爲負數(-1),② 式的最小值在 $x = b$ 時取得,

② 式值 $\ge -b-a+b+c = c-a$.

由於 $x > b$, x 的係數爲正數(1),③ 式值 $> b-a-b+c = c-a$.

由於 x 的係數3, $x > c$,④ 式值 $> 3c-a-b-c = c-a+c-b+c-c > c-a$.

綜合以上可得,原式的最小值是 $c-a$,這時 $x = b$.

學生的這種以絕對值的定義為切入點,用"分類的思想"去掉絕對值,從而求得最小值,屬初階思維的解法.

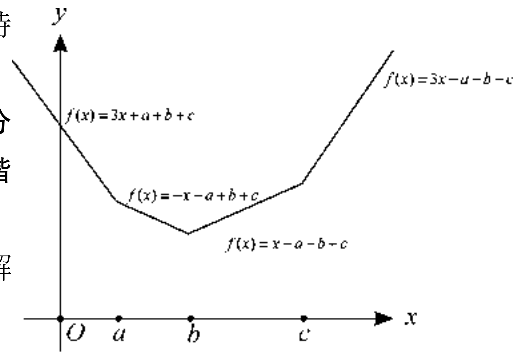


圖1

教師趁熱打鐵,提出問題:"有沒有更好的解法?"在沒有新解法時,教師拋出第二種解法如下:

設 $f(x) = |x-a|+|x-b|+|x-c|$,則

$$f(x)=\begin{cases}-3x+a+b+c(x\le a),\\-x-a+b+c(a<x\le b),\\x-a-b+c(b<x\le c),\\3x-a-b-c(x>c),\end{cases}$$

它的圖象可示意如圖 1 所示:

顯然,當 $x=b$ 時,$f(x)$ 有最小值,這時 $f(x)=-b-a+b+c=c-a$.

引進"假設 $f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$",作出函數圖象,把求原式的最小值,變為求 $f(x)$ 的最小值,從而使學生進一步理解,以"形"代"數",換位思考的好處,看到"數形結合"的重要性.

在教師這一解法的啓示下,一位平時勤於思考,善於探索的學生李毅,在沒等教師提出"同學們有沒有更好的解法時",就把手舉了起來,他說:"老師,我的解法比您的解法更簡單".

他的解法如下:

$|x-a|$ 的幾何意義是:在數軸上,表示實數 x 與實數 a 的兩個點之間的距離.

於是,求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值的意義就是在數軸上求一點(對應實數 x),使它到對應實數 a,b,c 的三個點 A, B, C 的距離之和最小,那麼,如圖 2 所示,當這個點 x 取在點 B 的位置時,它到 A, B, C 三點的距離之和最小,其和為 $c-a$.

因為,點 x 取在 b 以外的任何位置時,三條線段 $|x-a|$,$|x-b|$,$|x-c|$ 都有重復部分,因而總長度大於 $c-a$,如圖 3.

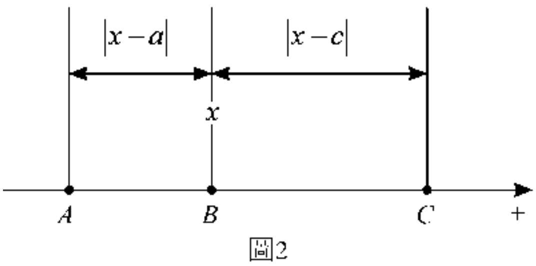


圖2

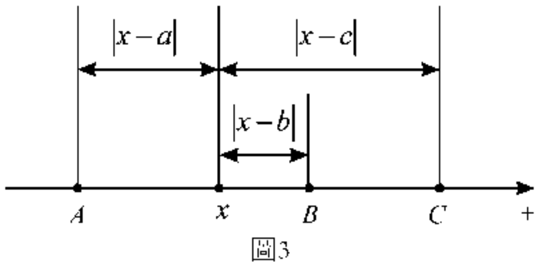


圖3

這個解法多麼漂亮,大大簡捷於老師的解法!

為甚麼能得到這個簡捷的解法呢?

原因之一是,對絶對值概念的多方位認識,因而理解廣泛,應用靈活;

原因之二是,面對問題,從代數到幾何,換了個思考角度;

原因之三是,從心理上,不只是跟在老師的後面亦步亦趨,而且敢於向老師"挑戰",獨立思考,這一條是前提,是一切的出發點. 課堂教學變為師生以平等的地位,互相啓發,互相合作探索,完成教學目標,"師生是同一戰壕上的戰友"一點也沒説錯!

原因之四,該名學生把"三個絶對值之和"理解為"三個距離之和",從而有"四兩破千斤"的思維方法,巧妙地求解,它比老師用"二維"的"數形結合"解法更加巧,更加妙!

順藤摸瓜,教師更提出下列問題,激起學生更深層次的思考,藉以強化學生對該名優秀

生巧思妙解的理解：

(1) x 取何值時，$|x-a|+|x-b|(a<b)$ 取最小值，最小值是多少？〔$a \le x \le b$ 時，最小值爲 $b-a$.〕

(2) x 取何值時，$|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|(a<b<c<d)$ 取最小值，最小值是多少？[$b \le x \le c$ 時，最小值 $(c-b)+(d-a)$.]

(3) 退一步，x 取何值時，$|x-a|$ 取最小值，最小值是多少？

(4) 上述各式有否最大值？爲什麼？

＊ 此題仍為“得用絶對值的幾何解釋解題”的範例之一.

＊＊ 北京 22 中數學特級教師孫維剛老師(《全班 55% 怎樣考上北大、清華》一書的作者)，以傳統的解法(采用“數形結合，分段求函數值，作函數圖象”求函數的最小值)作出漂亮的解答. 但學生李毅卻即場指出，“老師，我的解法比您簡單”. 學生用絶對值的幾何解釋，兩步便得出與老師相同的答案. “用絶對值的幾何解釋解題”出現彩虹！學生向老師挑戰了！(孫老師的教學已經達到了“教是為了不教”！“青出於藍而勝於藍”！).

〔**例 10**〕求函數 $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$ 的最小値.

〔**解法一**〕$\because y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$,

$\therefore y=|x+2|+|x|+|x-1|+|x-3|$.

由 $x+2=0, x=0, x=1$, 和 $x-3=0$ 可得，

$x=-2, x=0, x=1$ 和 $x=3$.

因此可得數軸 ox 上的 5 個區間：

$(-\infty, -2], (-2,0], (0,1), [1,3)$ 和 $[3,+\infty)$.

(1) 當 $x \le -2$ 時，即 $x \in (-8,-2]$ 時，這個函數爲

$y=-(x+2)-x-(x-1)-(x-3)$,

即 $y=-4x+2$.

$y=-4x+2$ 在 $(-\infty,-2]$ 上爲遞減函數，

$\therefore$ 當 $x=-2$ 時，$y_{min}=10$.

(2) 當 $-2<x \le 0$ 時，即 $x \in (-2,0]$ 時，這個函數爲

$y=(x+2)-x-(x-1)-(x-3)$,

即 $y=-2x+6$.

$y=-2x+6$ 在 $(-2,0]$ 上爲遞減函數，

$\therefore$ 當 $x=0$ 時，$y_{min}=6$.

(3) 當 $0<x<1$ 時，即 $x \in (0,1)$ 時，這個函數爲

$y=(x+2)+x-(x-1)-(x-3)$,

即 $y=6$

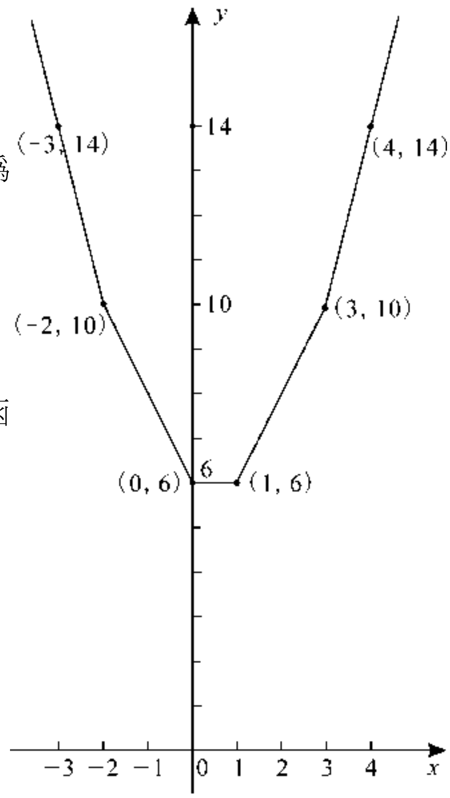


圖1

$\therefore$ 當$(0,1)$上,y爲常數6.

(4) 當$1 \le x < 3$時,即$x \in [1,3)$時,這個函數爲

$$y = (x+2) + x + (x-1) - (x-3),$$

即$y = 2x + 4$.

函數$y = 2x + 4$在$[1,3)$上是遞增函數,

$\therefore$ 當$x = 1$時,$y_{min} = 6$.

(5) 當$x \ge 3$時,即$x \in [3, +\infty)$時,這個函數爲

$$y = (x+2) + x + (x-1) + (x-3),$$

即$y = 4x - 2$.

函數$y = 4x - 2$在$[3, +\infty)$上是遞增函數,

$\therefore$ 當$x = 3$時,$y_{min} = 10$.

由(1),(2),(3),(4),(5)可知,在區間$[0,1]$上函數y取最小值6(見圖1所示).

〔**解法二**〕$\because$ $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

$\therefore y = |x+2| + |x| + |x-1| + |x-3|$.

即$y = |x-(-2)| + |x-0| + |x-1| + |x-3|$.

$\therefore$ 在數軸上表示實數x的點A與表示實數-2的點A_1的距離,點A與表示實數0的點O的距離,點A與表示實數1的點A_2的距離,點A與表示實數3的點A_3的距離,這四者之和要達到最小值,這種點A若在數軸ox上線段OA_2上(包括點O和點A_2),則y取函數值6(見圖2所示).

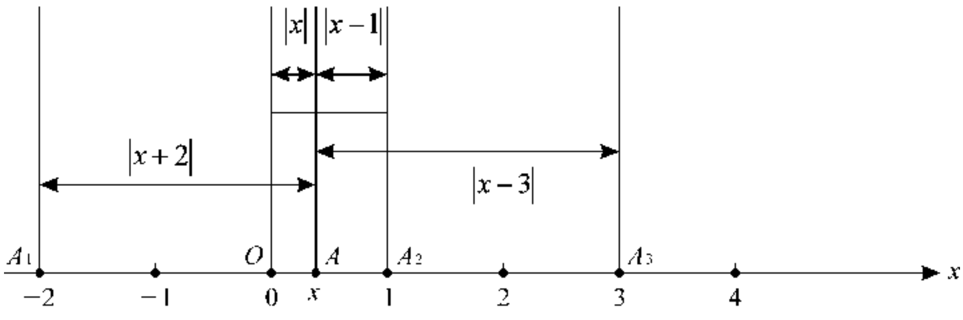


圖2

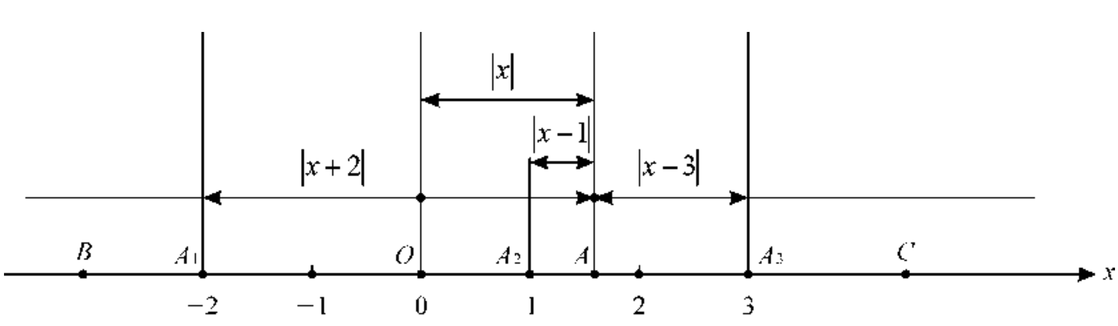


圖3

除此之外,若表示實數 x 的點 A 在數軸 ox 上線段 OA_2(不包括點 O 和點 A_2)以外(左右兩側)的兩條射線 OB 和 A_2C,則上述四個數之和都大於 6(見圖 3 所示)(此時,BA_1,BO,BA_2,BA_3 四條線段都有重疊部分,并且這四條線段的長度之和已超過 6;CA_1,CO,CA_2CA_3 四條線段也都有重疊部分,并且這四條線段的長度之和也都已超過 6).

根據上述的分析(**"用絶對值的幾何解釋解題"**)可知函數 $y = \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$ 在區間[0,1]上取最小值 6.

參考文獻

[1](蘇)N. N. 蓋杜科夫著:《絶對值》,測繪出版社 1983 年版.
[2]李思文編:《絶對值與算術根》,江蘇教育出版社 1987 年版.
[3]孫家鈺,俞裕安著:《算術根與絶對值》,北京師範大學出版社 1987 年版.
[4]婁桐城著:《含絶對值的方程、不等式、函數》,北京師範大學出版社 1987 年版.
[5]莫雲龍、許汝递著:《解絶對值問題的方法和技巧》,廣西教育出版社 1988 年版.
[6]張福生、趙國禮編著《怎樣解不等式》,上海教育出版社 1997 年版.
[7]孫維剛著:《全班 55% 怎樣考上北大、清華》,北方婦女兒童出版社 2000 年版.

談談多項式除法中的餘式之求解

澳門鏡平學校中學部　鄧海棠

求多項式除法中的餘式在一些本澳高考和內地聯考,特別是臺灣各大學港澳區招生入學考試中屢見不鮮,在李偉東主編、澳門出版協會於 2010 年出版的《1991 ~ 2010 年臺灣各大學港澳區招生入學試數學科試題(理科)復習手冊》一書中第 7 頁的考題知識點分佈圖(如下圖 1)及第 8 頁的考題題量分佈表(如下表 1)的統計中可以清楚看到,多項式的相關知識的考試題量位列第二多,僅次於三角函數之後,很有必要探討一下.

1991 ~ 2010 年考題知識點分佈

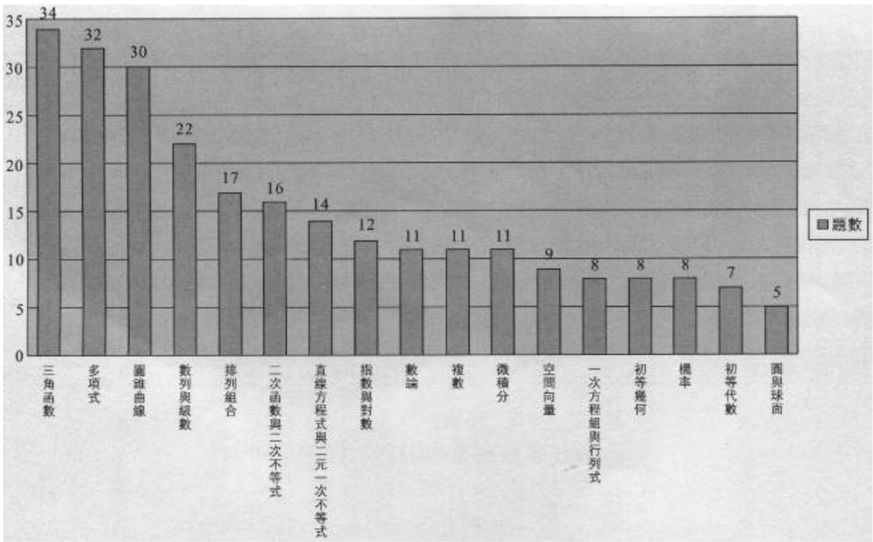


圖1——考題知識點分佈圖

1991 ~ 2010 年考題題量分佈

知識面	知識點	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	總數
代數	多項式	1	1	3	2	1	1	1	2	1	2	1	2	2	3	2	2	2	0	2	1	32
	數列與級數	1	1	0	1	1	0	2	0	3	0	2	1	2	1	2	1	1	0	2	1	22
	二次函數與二次不等式	0	0	1	2	2	1	1	0	1	2	0	2	0	1	1	1	0	0	1	0	16
	指數與對數	1	0	1	1	0	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	12
	數論	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	3	1	0	1	0	1	0	1	0	1	11
	初等代數	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	7
	一次方程組與行列式	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	8
三角	三角函數	0	1	1	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	1	1	2	1	2	1	1	34
幾何	圓錐曲線	0	1	2	2	2	2	2	2	0	1	1	0	3	2	3	1	2	3	1	0	30
	直線方程式與二元一次不等式	1	1	0	0	1	1	0	1	1	2	2	0	0	1	1	0	0	1	0	1	14
	初等幾何	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	1	0	1	1	0	0	8
	圓與球面	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	5
機率統計	排列組合	0	2	1	2	2	1	1	1	0	0	0	2	0	1	0	0	1	1	1	1	17
	機率	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	8
高等數學	複數	0	2	2	0	1	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11
	微積分	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	1	1	11
	空間向量	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	1	9
	總數	10	11	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	255

表1——考題題量分佈表

設一元多項式$f(x)$除以$x-b$的商式爲$g(x)$,餘式爲R,則有恆等式:$f(x)=(x-b)g(x)+R$.

當$x=b$時,可得$f(b)=R$.

這樣,我們得到了餘式定理:一元多項式$f(x)$除以$x-b$的餘式爲$f(b)$.

根據餘式定理,我們可以通過求$f(b)$來求$f(x)$除以$x-b$的餘式R,也可以通過R求來計算$f(b)$.求值的關鍵是使得除式(與商式之積)的值爲0.以下通過幾個類型的例題說明一下:除式能夠在實數範圍內分解成x的一次因式的多項式求餘式的情況.

〔**例1**〕設$f(x)=x^8+3$,求$f(x)$除以$x+1$的餘數R.

解:根據餘式定理,$R=f(-1)=(-1)^8+3=4$.

〔**例2**〕設$f(x)=x^5-2x^4+5x^3-9x^2$,求$f(6)$.

解:用綜合除法,求$f(x)$除以$x-6$的餘數,

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -2 & +5 & -9 & +0 & +0 & 6 \\
 & +6 & +24 & +174 & +990 & +5940 & \\
\hline
1 & +4 & +29 & +165 & +990 & +5940 &
\end{array}$$

$\therefore$ 餘數$R=5940$.根據餘式定理,$f(6)=5940$.

〔**例3**〕試利用餘式定理,求$2x^4-3x^3+4x^2-3x+7$除以$2x+3$的餘數.

〔**思路分析**〕若除式$g(x)=mx-n$,則餘數$R=f(\frac{n}{m})$.

解:設$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-3x+7$,

$\because f(-\frac{3}{2})=2(-\frac{3}{2})^4-3(-\frac{3}{2})^3+4(-\frac{3}{2})^2-3(-\frac{3}{2})+7=\frac{163}{4}$,

$\therefore$ 餘數爲$\frac{163}{4}$.

〔**例4**〕試利用餘式定理求$(6x^3-4x^2+x-5)\div(x^2-3x+2)$的餘式.

〔**思路分析**〕當除式是二次多項式(x^2-3x+2)時,餘數必是含有一次二項式$(ax+b)$,因$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$,所以$f(x)=g(x)q(x)+R$可以寫成$f(x)=(x-2)(x-1)q(x)+(ax+b)$,分別將$x=2$和$x=1$代入$f(x)$式中,便可得兩個含有$a$和$b$的方程,從而解得$a$和$b$的值.

解:設$f(x)=6x^3-4x^2+x-5$,餘數是$ax+b$.

$\because x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$,

$6\times2^3-4\times2^2+2-5=f(2)=2a+b$, 即$2a+b=29$. ①

$6\times1^3-4\times1^2+1-5=f(1)=2a+b$, 即$a+b=-2$. ②

① - ② 得$a=31$,將$a=31$代入 ② 得$b=-33$,

故餘式是$31x-33$.

(本例及例5的解法均屬於運用“待定係數法”解題.)

〔**例 5**〕当 $2x^2+mx+n$ 除以 $(x-1)$ 時,餘數是 2;而當該多項式除以 $(x+2)$ 時,餘數是 -1,試求 m 和 n 的值.

〔**思路分析**〕因爲多項式中有兩個未知係數 m 和 n, 所以要兩次利用餘式定理, 設立兩個方程. 以求 m 和 n 的值.

解: 設 $f(x)=2x^2+mx+n$,

因爲 $f(1)=2\times 1^2+m+n=2$, 即 $m+n=0$. ①

$f(-2)=2\times(-2)^2+m(-2)+n=-1$, 即 $2m-n=9$. ②

由 ① ② 可以得出 $m=3$, $n=-3$.

〔**例 6**〕若多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 和 $(x+1)$ 的餘數分別是 2 和 -4, 求 $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式.

解: 根據題意,可設

$f(x)=(x-1)q_1(x)+2$, ①

$f(x)=(x+1)q_2(x)-4$. ②

根據餘式定理,由 ① 及 ② 分別得

$f(1)=2$,③(**"聲東"**)和 $f(-1)=-4$,④(**"聲東"**).

設 $f(x)$ 除以 x^2-1 的商式和餘式分別是 $q(x)$ 和 $ax+b$,則有

$f(x)=(x-1)(x+1)q(x)+ax+b$. ⑤

由 ①,③,⑤ 可得

$a+b=0\times q(1)+a+b=f(1)=2$, (**"擊西"**)

由 ②,④,⑤ 可得

$-a+b=0\times q(-1)-a+b=f(-1)=-4$, (**"擊西"**)

即 $\begin{cases} a+b=2, \\ -a+b=-4. \end{cases}$

解之,得 $\begin{cases} a=3, \\ b=-1. \end{cases}$

$\therefore f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式是 $3x-1$.

[**注**] 此解法中,運用**"聲東擊西"**法,藉助於同一個等式 $f(x)=(x-1)(x+1)q(x)+ax+b$,通過 $f(1)$ 和 $f(-1)$"消去 $q(x)$",達到**"設($q(x)$)而不求($q(x)$)"**.

以上各種類型的例子中,各個多項式的除式都能夠在實數範圍内分解成 x 的一次因式,因而可以較爲順利求得相應的餘式. 但是,在早年的一些臺灣高等大學招生入學考試中,多項式的除式出現過不能夠在實數範圍内分解成 x 的一次因式的情況,那就得藉助復數的相應知識來解決問題了. 情況如下:

〔**例 7**〕設多項式 $g(x)=x^{31}-2x^{17}+5x^9-4x^4+1$,則以 x^2+x+1 除 $g(x)$ 所得餘式爲 ________. [1992 年臺灣各大學港澳區招生入學試數學科試題(理科)].

〔**思路分析**〕由於x^2+x+1在實數範圍內不能分解因式,考慮到復數ω的特有性質:$\omega^2+\omega+1=0$及$\omega^3=1$,因而可以令$x=\omega$進行求解.

解:令$x=\omega$,設$g(x)=(x^2+x+1)q(x)+(ax+b)$,由$\omega^3=1$及$\omega^2+\omega+1=0$,得

$g(\omega)=\omega^{31}-2\omega^{17}+5\omega^9-4\omega^4+1=\omega-2\omega^2+5-4\omega+1=-\omega+8$;

$g(\omega)=(\omega^2+\omega+1)q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b$.

比較上述兩式得:$a=-1,b=8$.

從而所求餘式爲:$-x+8$.

與〔例7〕同類型的還有:① 設多項式$f(x)=x^{38}-2x^{26}+2x^{11}-x$除以$x^2+x+1$,則餘式 = ________.[1995年臺灣各大學港澳區招生入學試數學科試題(理科)];

② 設$f(x)$爲一多項式,若$(x+1)f(x)$除以x^2+x+1所得的餘式爲$3x+1$,求$f(x)$除以x^2+x+1之餘式是什麼?[2007年臺灣各大學港澳區招生入學試數學科試題(理科)].

〔**例8**〕若多項式$x^{24}+x^{16}+x^4+x+1$除以x^2+1,則所得的餘式爲________.[1999年臺灣各大學港澳區招生入學試數學科試題(理科)].

〔**思路分析**〕由於x^2+1在實數範圍內不能分解因式,考慮到復數i的特有性質:$i^2=-1$及$i^3=-i,i^4=1$,因而可以令$x=i$進行求解.

解:令$x=i$,設$g(x)=x^{24}+x^{16}+x^4+x+1=(x^2+1)q(x)+(ax+b)$,由$i^2=-1$及$i^3=-i,i^4=1$,得

$g(i)=i^{24}+i^{16}+i^4+i+1=1+1+1+i+1=4+i$及$g(i)=(i^2+1)q(i)+(ai+b)=ai+b$.

比較上述兩式得:$a=1,b=4$.

從而所求的餘式爲:$x+4$.

可見,對於多項式除法中的餘式之求解,可以先考慮把多項式的除式在實數範圍內分解成x的一次因式,不行的話,就要藉助復數的相應知識來進行求解.以上種種,希望能給同行以螢光之鑒.

概率模擬實驗在中學的應用

澳門培道中學　趙文遠

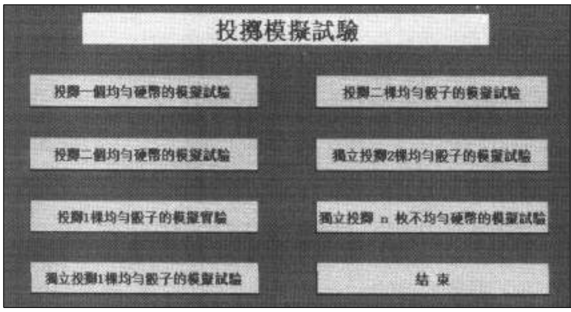
【摘要】學生在學習概率之前的數學,要解決的問題都是精準的,演算的結果都是經得起檢驗的. 而概率研究的問題,無論提問或回答卻只是一種"可能性". "可能性" 問題本身是一種"不精準的" 問題,問題的答案也難以被少數幾次實踐所檢驗. 針對這門課的難點,我們根據教材的課例和習題,歸類出幾種概率模型—概型,用 $Excel+VBA$ 設計了相關概型的模擬實驗平臺. 以探究式數學實驗教學法,老師用之講解例題,學生用之檢驗習題答案,達到了較好的教學效果,在一定程度上解決了難教學的問題,本文對此作一介紹,祈與大家分享.

【關鍵字】概率模型;$Excel + VBA$;數學實驗教學法.

1. 三個概率模擬試驗平臺.

我們的概率模擬試驗平臺有三個,可以涵蓋教材中絕大部分古典概型、二項分佈概型、幾何分佈概型和超幾何分佈概型的問題.

1. 投擲模似試驗平臺:

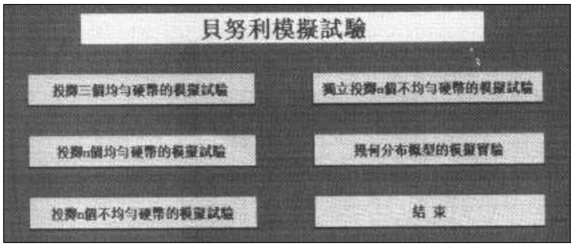


投擲模擬試驗

1. 適用於概率的基本概念的教學,例如:頻數、頻率、概率、互斥、獨立、幷且、或者、相反(事件)等的概念教學.

解決了教材中大部分古典概型問題的檢驗.

2. 貝努利模擬試驗平臺:



貝努利模擬試驗

1. 是一個能滿足貝努利試驗條件 — 獨立、互斥條件的概率試驗平臺.

2. 提供[二項式分佈概型] 和[幾何分佈概型] 問題的概率實驗. 檢驗該類概型問題的答案.

3. **模球模擬試驗:**

模球模擬試驗

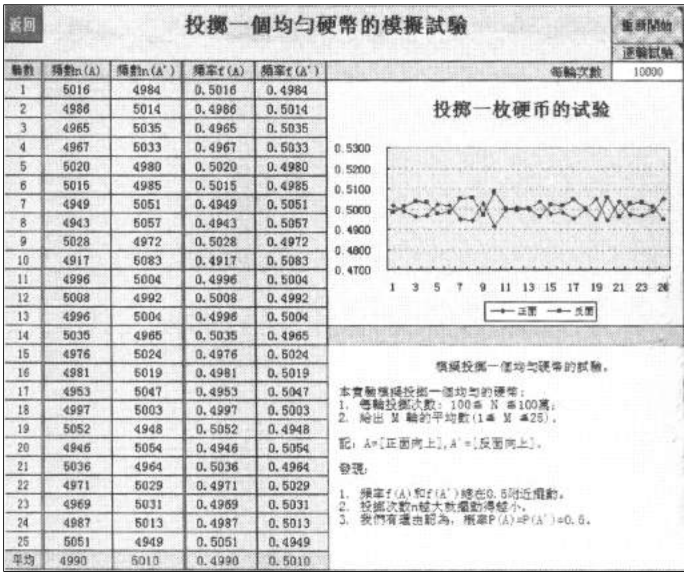
是一個能滿足超幾何分佈概型條件的概率實驗平臺,檢驗該類概型問題的答案.

2. 教學舉例.

例如,投擲一個均勻硬幣,求擲得正面的概率.

老師在教學中往往會提及到:人們曾經通過大量的實驗證明擲得正面的可能性是 0.5,但學生總會覺得這是從天而降,老師欠缺實驗去支持這個說法. 學生也可能會通過投擲自己手上的硬幣去驗證一下這個說法. 然而學生投擲一枚硬幣 100 次,所投擲得的結果往往不是出現 50 個正面,50 個反面的結果. 學生總不能投擲一枚硬幣 1000000 次,或不停地重復做這個消耗時間的實驗. 對概率,老師與學生總是缺乏一種驗證能力.

〔**例** 1〕投擲一枚均勻硬幣的模擬試驗.



輪數	頻數n(A)	頻數n(A')	頻率f(A)	頻率f(A')
1	5016	4984	0.5016	0.4984
2	4986	5014	0.4986	0.5014
3	4965	5035	0.4965	0.5035
4	4967	5033	0.4967	0.5033
5	5020	4980	0.5020	0.4980
6	5015	4985	0.5015	0.4985
7	4949	5051	0.4949	0.5051
8	4943	5057	0.4943	0.5057
9	5028	4972	0.5028	0.4972
10	4917	5083	0.4917	0.5083
11	4996	5004	0.4996	0.5004
12	5008	4992	0.5008	0.4992
13	4996	5004	0.4996	0.5004
14	5035	4965	0.5035	0.4965
15	4976	5024	0.4976	0.5024
16	4981	5019	0.4981	0.5019
17	4953	5047	0.4953	0.5047
18	4997	5003	0.4997	0.5003
19	5052	4948	0.5052	0.4948
20	4946	5054	0.4946	0.5054
21	5036	4964	0.5036	0.4964
22	4971	5029	0.4971	0.5029
23	4969	5031	0.4969	0.5031
24	4987	5013	0.4987	0.5013
25	5051	4949	0.5051	0.4949
平均	4990	5010	0.4990	0.5010

投擲一個均勻硬幣 25 輪,每輪 1 萬次,10 萬次,100 萬次. 圖表給出:

每一輪投擲 10 萬次所得正反面的頻數和頻率,25 輪頻數和頻率的平均值,並用圖線表示出來.

這使學生能:

1. 清晰了解什麼是事件、試驗、頻數、頻率、概率等的基本概念;

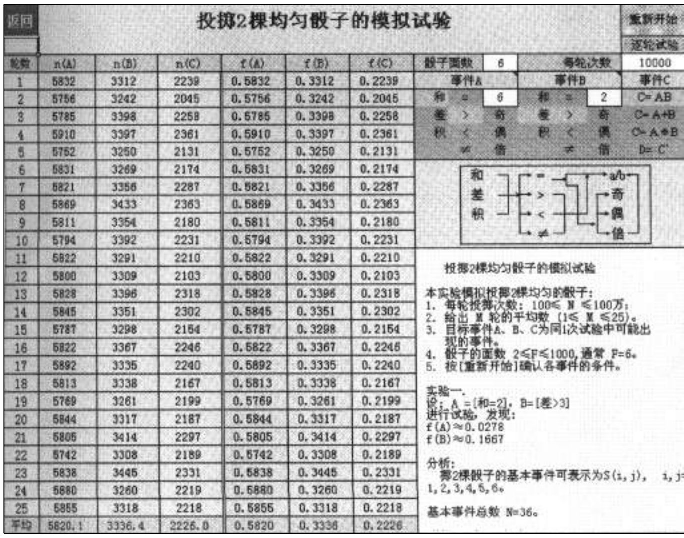
2. 驗證、確信投擲一枚均勻硬幣出現正面的概率是 0.5.

〔**例** 2〕擲 2 棵骰子,問:[和 > 6 而　 差 > 2] 的概率.

根據古典概型的方法計算是:

步驟	事件表達	計算
基本事件	$S(i,j)$,其中 $i,j = 1,2,\cdots 6$.	$N = 6^2 = 36$.
目標事件	$A = S(i,j)$,其中 $i+j > 6$, $\lvert i-j \rvert > 2$;列出滿足[$i+j > 6 \lvert i-j \rvert < 2$] 的$(i,j)$ 的全部情況有 8 種.	$n(A) = 8$. $P(A)\ \dfrac{n(A)}{N} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

實驗驗證：



轮数	n(A)	n(B)	n(C)	f(A)	f(B)	f(C)
1	5832	3312	2239	0.5832	0.3312	0.2239
2	5756	3242	2045	0.5756	0.3242	0.2045
3	5785	3398	2258	0.5785	0.3398	0.2258
4	5910	3397	2361	0.5910	0.3397	0.2361
5	5752	3250	2131	0.5752	0.3250	0.2131
6	5831	3269	2174	0.5831	0.3269	0.2174
7	5821	3356	2287	0.5821	0.3356	0.2287
8	5869	3433	2363	0.5869	0.3433	0.2363
9	5811	3354	2180	0.5811	0.3354	0.2180
10	5794	3392	2231	0.5794	0.3392	0.2231
11	5822	3291	2210	0.5822	0.3291	0.2210
12	5800	3309	2103	0.5800	0.3309	0.2103
13	5828	3396	2318	0.5828	0.3396	0.2318
14	5845	3351	2302	0.5845	0.3351	0.2302
15	5787	3298	2154	0.5787	0.3298	0.2154
16	5822	3367	2246	0.5822	0.3367	0.2246
17	5892	3335	2240	0.5892	0.3335	0.2240
18	5813	3338	2167	0.5813	0.3338	0.2167
19	5769	3261	2199	0.5769	0.3261	0.2199
20	5844	3317	2187	0.5844	0.3317	0.2187
21	5805	3414	2297	0.5805	0.3414	0.2297
22	5742	3308	2189	0.5742	0.3308	0.2189
23	5838	3445	2331	0.5838	0.3445	0.2331
24	5880	3260	2219	0.5880	0.3260	0.2219
25	5855	3318	2218	0.5855	0.3318	0.2218
平均	5820.1	3336.4	2226.0	0.5820	0.3336	0.2226

根據古典概型的方法，本題要表列出所有能滿足條件的目標事件：(1,6)，(6,1)，(2,5)(5,2)，(2,6)，(6,2)，(3,6)，(6,3)，$n(A) = 8$. 這需要有技巧和方法，否則很容易出錯.

$P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

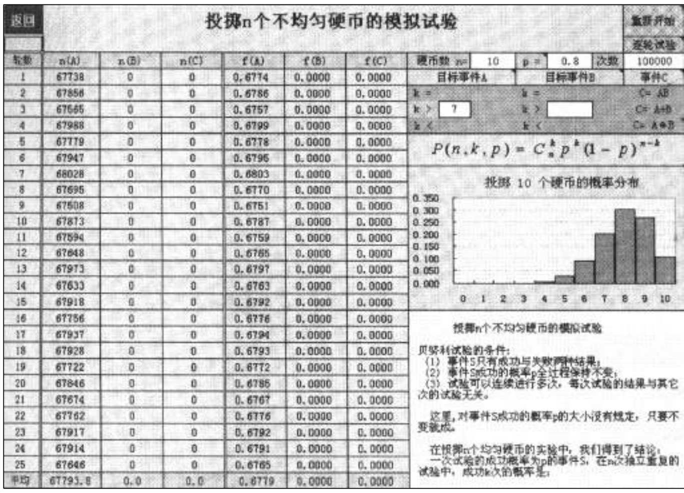
通過實驗（左圖：事件 C）檢驗，一方面可以檢驗計算的結果：$\frac{2}{9}. = 0.2222$. 更是對上述表列和數數的方法、技巧的肯定，總結經驗、增強自信.

〔**例** 3〕校籃球隊以［投籃 10 次，命中 8 次或以上］爲標準招募新隊員，李同學平時訓練時測得投籃命中率爲 80%. 問：李同學入選的概率爲何.

〔**解**〕根據二項分佈概型公式有：

$P(A) = C_1^80 \cdot 0.8^8 \cdot 0.2^2 + C_1^90 \cdot 0.8^9 \cdot 0.2^1 + C_{10}^{10} \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^0 = 0.6778$

實驗驗證［投擲 n 個均勻硬幣的模擬試驗］：



轮数	n(A)	n(B)	n(C)	f(A)	f(B)	f(C)
1	67738	0	0	0.6774	0.0000	0.0000
2	67856	0	0	0.6786	0.0000	0.0000
3	67565	0	0	0.6757	0.0000	0.0000
4	67988	0	0	0.6799	0.0000	0.0000
5	67779	0	0	0.6778	0.0000	0.0000
6	67947	0	0	0.6795	0.0000	0.0000
7	68028	0	0	0.6803	0.0000	0.0000
8	67695	0	0	0.6770	0.0000	0.0000
9	67508	0	0	0.6751	0.0000	0.0000
10	67873	0	0	0.6787	0.0000	0.0000
11	67594	0	0	0.6759	0.0000	0.0000
12	67648	0	0	0.6765	0.0000	0.0000
13	67973	0	0	0.6797	0.0000	0.0000
14	67633	0	0	0.6763	0.0000	0.0000
15	67918	0	0	0.6792	0.0000	0.0000
16	67756	0	0	0.6776	0.0000	0.0000
17	67937	0	0	0.6794	0.0000	0.0000
18	67928	0	0	0.6793	0.0000	0.0000
19	67722	0	0	0.6772	0.0000	0.0000
20	67846	0	0	0.6785	0.0000	0.0000
21	67674	0	0	0.6767	0.0000	0.0000
22	67762	0	0	0.6776	0.0000	0.0000
23	67917	0	0	0.6792	0.0000	0.0000
24	67914	0	0	0.6791	0.0000	0.0000
25	67646	0	0	0.6765	0.0000	0.0000
平均	67793.8	0.0	0.0	0.6779	0.0000	0.0000

本題難點：

1. 學生想不起用二項分佈概型公式；

2. 計算易出錯.

實驗：

將［投籃 10 次，命中 8 次或以上］套入模型［投擲 10 硬幣，出現下面 7 次以上］.

取 $n = 10, p = 0.8$

事件 $A = \{k > 7\}$.

實驗數據：0.667（左圖）. 驗證了計算正確.

〔**例** 4〕抽獎公平性檢驗.

在 12 人圍桌中抽圍獎，有鬮 12 條，其中有 3 鬮中獎. 12 個人輪流抓鬮（抓走不放回），問：這樣的抽獎公平嗎？

〔**解**〕這是喜慶餐飲中常見的活動.

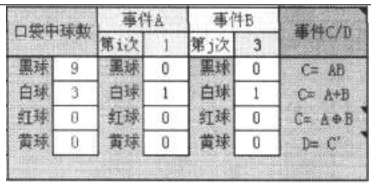
1. 第 1 人中獎的概率顯然是$\frac{3}{12} = 0.25$.

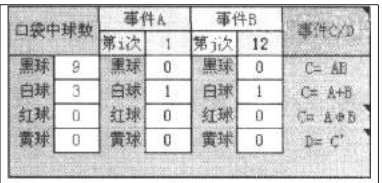
一般地,很希望中獎的人都會爭先第 1 個抽獎,而不願抓尾鬮,以爲第 1 個抓中的機會最大.

如果第 1 人抓中,則第 2 人中獎的機會是$\frac{2}{11}$,又如果第 1 人抓不中,則第 2 人中獎的機會是$\frac{3}{11}$,後抓的中獎概率受前抓的結果影響. 以此推想,似乎這種抽獎並不公平.

2. 先做實驗,看看結果怎樣.

將[抽獎]套入[摸球模擬實驗]模型. 設黑球 9 個,白球 3 個. 摸得白球爲中獎.





P(第 1 次摸得白球)≈ 0.25	P(第 1 次摸得白球)≈ 0.25	P(第 1 次摸得白球)≈ 0.25
P(第 2 次摸得白球)≈ 0.25	P(第 3 次摸得白球)≈ 0.25	P(第 12 次摸得白球)≈ 0.25

實驗發現:無論是第 1 人或最後的第 12 人,摸得白球(中獎)的機會都是:$p = 0.25$. ⇒ 這樣的抽獎是公平的.

3. 分析 – 以第 2 次摸得白球爲例:

記[i 白] = [第 i 次摸得白],[i 黑] = [第 i 次摸得黑],

則[1 白] $= \frac{3}{12} = 0.25$,[1 黑] $= \frac{9}{12} = 0.75$;

事件[第 2 次摸得白] = [2 白] = [1 黑][2 白] 或[1 白][2 白]

P(第 2 次摸得白) $= \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{27+6}{11 \times 12} = \frac{1}{4} = 0.25.$

3. 我們的體會.

概率概率,只是一種“大概的比率”,與現實比較並不精準. 計算得到某事件的概率 p,也難以驗算,對錯難以判斷,錯了也不知道錯在哪裏,學生總有一種“虛無”的感覺 —“玄”.

概率實驗使概率獲得了實驗支持,在很大程度上解決了這個玄字. 通過驗證,“虛無”變得“實在”,學生獲得了自信,也慢慢積累了解題的經驗. 碰到課外題,教師也比較有把握地判斷或比較各種解題的思路、方法和結果,難教難學的問題初步得到了改善.

上面介紹的概率實驗平臺是我校現任校董,前任副校長韋輝樑先生在不久前剛完成初版開發,教師還是初次試用,效果還有待進一步總結,在此僅與各位介紹和分享.

從“證明不等式”看“齊次化”的作用

勞工子學校　施振雄　董淑珍

證明不等式一直是高中數學較難的內容之一,內容之難在於天馬行空的放縮難以形成一個方向. 與證明等式不同的是,證明等式總有一個很明確的方向去進行變形,輔之以分析法或數學歸納法等,基本可以解決等式證明的問題. 證明不等式由於是經過放縮而得到的,因此證明過程大多都是隱藏性非常強的,所以我們需要一些特別的方法. 將不等式齊次化是證明不等式的一個有效方法,能很快揭示不等式證明的本質特徵.

本文將介紹“齊次化” 在證明不等式中的方法與有效作用.

(1) 什麼叫“齊次化”?

不等式的齊次指的是,不等式兩邊之代數式的每一個項的次數都相同,如果不一樣的話我們就想辦法把次數化成一樣,就叫做不等式的“齊次化”.

(2) 為什麼要“齊次化”?

一般來說,證明不等式多數是研究齊次的代數式的大小關係,兩個代數式齊次是使得兩者之間大小關係相對接近的常見形態之一. 由於同次代數式的大小關係比較接近,因而在證明過程中要放縮的“量” 就會比較小,證明不等式時經常會碰到下面這種情況,想證明 $a \geq c$ 時,我們發現 $a \geq b$,且 $c \geq b$,從而無法得到我們想要的關係,這就是因爲對 a 和 c 進行放縮時,放縮的量太大的原因. 而齊次不等式可以放縮的量是比較小的,所以大多數證明不等式的關鍵點都在於同次代數式的比較. 很多不等式看起來不同次,但又感覺很難證明,其中一個原因就是該不等式本質上是非同次不等式,從而難以放縮,基於這個理由,我們將不等式“齊次化”,把隱藏的本質特徵揭示出來,從而解決問題.

(3)“齊次化” 的作用.

從以下幾個簡單的例子將會發現“齊次化” 對不等式問題的有效解決.

〔**例 1**〕已知:$a,b,c \in R_+, a+b+c=1$,求證:$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

〔**分析與略证**〕不等式左邊是關係 a,b,c 的齊二次三元對稱式,右邊是0次,一看上去並沒有特別的方向,但由於 $a+b+c=1$,可先把右邊化成二次式,即證 $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

用分析法看一下,

由 $a,b,c\in R$,且 $a+b+c=1$,可知

$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+ca$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geq 0.$

分析到這裏,問題就顯而易見了.

事實上,$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$

所以原不等式成立.

〔**例 2**〕已知:$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,求證:$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leq 1.$

〔**分析與略证**〕不等式左邊是關係 $a_i,x_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 的齊二次式,右邊仍是零次式,考慮把不等式右邊化爲二次式,由條件 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,這時應考慮不等式右邊的 1 應化爲什麼形狀. 由於不等式左邊中 a_i 與 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的位置是對稱的,因此右邊的 1 不應該只化爲 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$,又或者只化爲 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,應該是"各占一半",

事實上,

由 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,可知

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leq 1$

$\Leftrightarrow a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n\leq\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$

$\Leftrightarrow 2(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\leq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$

$\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\geq 0$

分析到這裏,問題已經非常容易證了. 因爲,

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$

$=(a_1-x_1)^2+(a_2-x_2)^2+\cdots+(a_n-x_n)^2\geq 0$

所以原不等式成立.

從以上兩個簡單的例子的"齊次化" 的運用,可以看到將不等式"齊次化" 的方法容易得到與待證不等式等價的簡單之待證不等式,從而使得問題容易解決.

那麼如何"齊次化" 呢?下面再給出"齊次化" 的常見的問題解法.

〔**例 3**〕設 $a,b,c\in R_+,a^2+b^2+c^2=1$,求證:$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+3.$

〔**分析與略证**〕不等式右邊是關係 a,b,c 的齊"零" 次對稱式,而不等式左邊是齊"負二次" 次對稱式,因此考慮把不等式左邊也化爲齊"零" 次對稱式,可以進行簡單的"齊次化"。

由 $a,b,c\in R,a^2+b^2+c^2=1$,可知

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+3$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\geq\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+3$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+1+\frac{c^2}{b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)\geq\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}+\frac{2c^2}{ab}+3$$

$$\Leftrightarrow\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}+\frac{2c^2}{ab}$$

分析到這裏,不難發現,由均值不等式可以看到,問題已經非常容易得證. 事實上,

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)+\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)\geq\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}+\frac{2c^2}{ab}.$$

所以原不等式成立.

[**注**] 在“齊次化” 過程中,題目中的常數是考慮調整次數的主要對象之一,但是並非所有的常數都要調整.

下面我們再來看一道 *I. M. O* 的不等式證明題.

〔**例** 4〕(*IMO*2000) 設 a,b,c 是正實數且滿足 $abc=1$,求證:$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\leq 1$.

〔**分析與略证**〕待證式看上去次數不下,非常雜亂,且已知條件是常數與三次式的關係,如果用前面的“齊次化” 方法則會產生無理式,這樣會使問題更加復雜,因此我們需要另找出路,實際上可以通過換元法去處理.

注意到 $abc=1$, 設 $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x},x,y,z\in R^+$, 則原不等式等價於 $\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\leq 1$(這裏已經完成齊次化,兩邊均爲齊零次式),

等價於 $\frac{x-y+z}{y}\times\frac{y-z+x}{z}\times\frac{z-x+y}{x}\leq 1$,

等價於 $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leq xyz$.

等價於 $x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2y-x^2z-xy^2-xz^2-yz^2-y^2z\geq 0$.

而上述不等式正是 *Schur* 不等式,從而解決了問題.

從以上幾個例子可以發現,只要能對對稱不等式進行“齊次化” 的話,剩下的就是計算的過程,因此想辦法“齊次化” 才是解題的關鍵. 不過有時計算量相對會比較大,尤其不等式的次數一旦變高了,會使得計算量數以倍增,所以此時這個方法不容易操作,由本文可以看到,如果能常觀察到代數式的齊次性或將非齊次式“齊次化”,對解決問題將是很有幫助的.

培養一批"品格高,觀念新,技能强"的青年骨幹教師的方法初探

重慶渝中區人和街小學　翟渝成

重慶市人和街小學青年骨幹教師培訓班在學校傾力創設的"人和教育"框架下,以具有前瞻性的教育教學科研實踐爲抓手,秉持和衷共濟的動力性,堅持海納百川的源泉性,彰顯和而不同的創新性,以"人和"爲魂,和諧育人爲核心理念;把培養一批"品格高、觀念新、技能強"的青年骨幹教師作爲學研目標. 引領學員以師德促培訓、以教學促成長、以反思促提昇、以科研促發展,搭建人和街小學數學教師專業成長平臺,積極探索教師專業成長的研修機制,以數學學科隊伍建設爲突破口,全面提高我校青年數學教師的課堂教學技能,爲提高教學品質,爲學生的終身發展奠定堅實的基礎.

青研班有正式學員 10 人,非正式學員 2 人,這些教師比較年輕,知識積澱、文化底蘊和專業知識都比較欠缺,因此我們的培訓需從最基礎抓起. **為了讓他們盡快成長為教育教學骨幹,以"立足課堂,草根研究"為主題進行培訓,在培訓中我們樹立"細節決定成敗"的研修態度,堅持"海納百川、博採眾長"的行動策略,弘揚"在合作中共進,在實踐中成長"的精神,突出求真、務實、創新的學習作風.** 爲此,我們開展了系列研討活動:專家引領、名師大講堂、理論學習、讀書活動、課例研討、行動研究、考核評估等. 在這些活動中,每一位學員的課堂教學技能都有明顯提高,逐步將專業知識轉化爲技能,再把技能提昇爲藝術.

具體做法是:

一、加强師德師風建設 提高良好教師素養

在學研過程中,我們致力於把學員培養成爲一名有素養、有理念、有思想的教師. 其中的首要任務,就是要提高師德修養,先學會做人,再學會爲師,最後學會做學問. 在學研期間,組織學員認眞學習《中小學職業道德規範》,聆聽了優秀教師的先進事蹟報告,結合自己的教學實踐暢談自己的教育理想,教育追求. 在青研班開班儀式上,學員進行了別開生面的師德朗誦會. 本次活動,借開班之機開展了一次深刻而生動的師德培訓,是青研班力求把學員打造成骨幹教師的基本而重要的培訓. 十位學員結合自己的成長經歷和學習體會,暢談教師的師德修養,從不同角度詮釋了各自對師德的理解. 最後學員代表發言表決心,深情的演講,錚錚的誓言,可謂是一次深刻而生動的師德培訓.

通過師德師風的培訓,他們感受到培訓是福利,學習是享受,"教書育人"意味著艱難、

繁重和奉獻,要有不惜力、肯喫苦、勤動腦的精神. 累要累出價值來,累出品味來,累出創新來,累出智慧來!從而引領他們追求高品味的教師職業生活,享受著追求和奉獻所帶來的快樂與幸福,使教師用師德和智慧讓學生感受到學習的快樂和數學的魅力.

二、更新觀念 理論充電

(一)專家引領.

專家引領是青年教師成長的重要途徑,是打造青年教師人才最寶貴的資源,是提昇青研班品質和品味最寶貴的財富. 青研班努力通過各種途徑爲年輕教師的成長搭建更好、更高的展示舞臺,我們采取“請進來”和“走出去”等方式,先後聆聽了邱學華、鄭毓信、孔啓平、黃翔、陶寶平、劉家霞、劉顯國、吳正憲、徐長青、李光樹、胡芳、翟渝成等爲大家做了專題講座. 專家們幽默詼諧而富有哲理的講座讓學員們豁然開朗,讓許多教學的困惑在頷首深思中尋到了答案. 以上講座既有豐富的理論,又有生動的案例,還有實踐的體會. 通過一次次講座,不僅豐富了學員的專業知識,更重要的是學員的教育思想、專業技能、學科知識得到提高. 他們在先進教育思想的引領下,不斷更新教育觀念,提高了教學技能,教師的專業素養得到了很大的提昇.

(二)研修讀書.

教師應該是職業的讀書人,終身學習者,就需要有淵博的知識,豐厚的文化底蘊,在研修中發現,嚴重影響著教師自身學科素養提高的主要原因是教師的專業素養欠缺,學科理論水準偏低等. 在培訓中注重貫徹理論聯繫實際的原則,要求學員認眞學習古今中外的教育理論、理解“課程改革綱要”、“數學課程標準”、“課標解讀”的基本概念、目標和各階段的要求等. 不僅讀專業書籍,還要讀相關教育學科的書籍,從而達到既融會貫通本專業知識又廣泛涉獵其他學科領域,擴大知識的視野,充分發揮自己的文化積累和本土積澱,使學員自覺更新教育觀念,樹立適應現代化建設的教育觀、品質觀和人才觀. 與此同時我們在研修活動中力求通過多種活動,逐步提昇學員的理論素養,營造一種專業學習的氛圍. 如:每學期推薦相關的學習材料,提供好書一覽表,並要求每個學員制定讀書計畫,每天寫讀書筆記和讀書心得,定期安排讀書交流會,如:“我的教育故事分享會”,“怎樣提高課堂教學技能”,“和聲課堂的解讀”“培養小學生數學素養”等專題交流,同時要求學員推薦一本我喜歡的書,介紹該書的主要內容、精彩片段及自己的讀書感想. 在交流過程中,大家踴躍發言,共同分享著專家們的智慧,學員們一致認爲,通過讀書可以更新觀念,與時俱進,提高自己的業務水準和理論知識;通過讀書可以使人開茅塞,除鄙見,得新知,養性靈;通過讀書可以影響人的一生,改變一個人的品德,提昇一個人的思想,鑄造一個人的靈魂;通過讀書可以讓自己的小學數學專業知識得到進一步的豐富和提昇;兩年的讀書活動,學員學習的意識增強了,其中包括:文化積澱、專業素養、學科知識、前沿理論等. 在閱讀中擴大了知識領域,豐富了理論知識,轉變了教育觀念,積蓄了文化內力,提高了教學技能技巧.

三、搭建平臺 提高技能

要想成為一位優秀的數學教師,勤奮與執著、艱辛與磨礪、實踐與探索都是不可缺少的. 我們以課堂教學改革爲主管道,把研究目標聚焦在課堂教學實踐,鎖定在一線教師課堂能力的專業提昇上. 與此同時,爲學員搭建專業學習的平臺、展示才能的舞臺也是至關重要的. 青研班全體學員經歷了一次次艱辛的“磨課” 過程.

(一) 打磨“隨堂課”.

一名有特色的名優教師,必須從站穩三尺講臺開始,把教好書、上好課作爲成長的起點,我十分注重提高學員**“隨堂課”**(**“家常課”**) 的教學能力. 教師的智慧必須通過**“家常課”** 才能得到大幅度的提昇,因此**“家常課”** 也要磨練. 在**“隨堂課”** 的打磨過程中,對學員的每一節課,都從高處審視課堂,從細節處剖析課堂,諸如課堂教學的道入、講授、提問、理答、組織學生探究、資訊技術的應用、處理生成問題、解決臨時發生問題、檢測、評價、結果、回饋、回授等,並指出存在的不足,提出合理的教學建議. 通過隨堂課打磨,學員們更加意識到**好課真是“磨” 出來的!磨課是痛苦的、又是甜蜜的,痛苦的是過程、甜蜜的是結果.** 俗話說**:“人們只驚羡鮮花盛開的美麗,卻不知它們冲破泥土的艱辛.“磨課” 的過程正是教師教學生命成長的過程.**

(二) 搭建研討與交流的平臺.

爲了給學員搭建更多交流的平臺,我帶領工作室學員前往上海參加了全國骨幹教師培訓班的學習交流,全體學員聆聽了邱學華、孔企平等專家的講座. 學員在會上結合自己對新課標的理解、嘗試教學的體會與專家進行了零距離的對話與交流,並在大會上作了發言. 上海之行讓學員們充分享受了一場理論和實踐的教學盛宴. 在此期間,還帶領學員到天津、揚州、河北、澳門等地參加學術研討會,這些活動感受最深的是洗腦、充電,聆聽了多位專家講座和老師精彩的課堂教學演繹,充實而圓滿的研討活動是一次難忘的學習之旅,一場難得的教學盛宴,一回有效的理論提昇,更爲青研班研修活動的發展邁出了堅實的一步.

我們還爲學員搭建了教研交流的平臺. 每期研修活動中,每位學員以年級組爲單位擬定高效的期末復習計畫,並在研討會上進行交流,在交流中老師們把自己教學中的亮點、閃光點、遺漏點一一剖析,大家各抒己見,博採眾長,取長補短. 不僅有精選的復習題,還有自己獨樹一幟的復習方法,復習的訣竅更是毫無保留的與大家分享.

學員的復習計畫主要從指道思想、學情分析、復習目標、復習重難點、復習措施、復習課時劃分及知識點梳理、練習設計、預期達成的目標這幾個版塊進行彙報. 每個學員都按要求認眞準備了復習計畫的講稿,并且製作了精美的課件來輔助復習內容的呈現,這樣能更好地讓大家直觀、生動的理解復習計畫的內容. 復習計畫交流,學員們不僅受益匪淺、滿載而歸,而且取他人之長,補己之短,促進了復習的有效性.

(三) 搭建研究課的平臺.

在兩年的學研期間,爲了讓學員盡快的成長起來,形成自己的教學風格,爲他們搭建了

研究課、示範課的平臺,讓每位學員至少上兩節研究課,示範課,要求把每一節課上出新意、上出個性,在各自年級甚至全區起到示範、引領作用. 青研班全體學員又經歷了一次又一次艱辛的"磨課" 過程. **為上好每一堂課,我帶領他們反復修改教案,磨理念、磨教法、磨學法、磨學情、磨細節,層層打磨,讓他們不斷顛覆、不斷超越、不斷完善自我**. 在此基礎上,學員反復試講,週末的校園迴盪著我與學員一起試講的聲音;夜深人靜時,燈下晃動著我幫學員查資料、給學員打電話的身影,在電話裏與他們討論教學方法、教學策略,經常一討論就是一個多小時. 每"磨" 一節課,我總要悉心指道,大到設計理念,小到舉手投足,不放過任何一個環節和細節. **在這個過程中,學員"痛,但快樂著",痛在於過程的艱辛,快樂在於短暫的痛苦後獲得豐厚的回報和迅速的成長**.

2011 年 11 月開展了**"讓學生經歷知識形成過程"** 爲主題的教學研討活動,采用學員獻課、說課、相互評課的方式,開展了一次深刻透晰的教學研討活動. 在整個活動開展的過程中,體現了"細節決定成敗" 的意識,學員們在反復試講、反復修改、反復研磨的過程中,體現了團隊協作精神,實現了資源共用、智慧共生、成果共創、共同發展.

2012 年 3 月,開展了**"基於學生成長"** 爲主題的研討活動,要求課堂教學要關注成長中學生的整個生命發展,把學生生成的資源轉化成課堂教學中的新資源,讓課堂教學煥發出生命的活力. 青研班三位學員爲大家獻上精彩的生命課堂.

三節課結束後,重慶渝中區進修學院專家羅繼平老師、王紅梅老師分別對三節課做了精闢的點評,兩位專家高度評價了這次活動,首先認爲學校給青年教師搭建了一個很好的成長平臺,能夠促使青年教師迅速成長,其次認爲本次活動的主題很好,體現了新課標的理念. 本次活動,使學員們在上課準備及實施中得到了歷練,教學理念得到更新,課堂教學技能也得到顯著提高.

2012 年 10 月開展了**"和聲課堂"** 教學研討活動,執教老師在課堂中充分體現了"和聲" 課堂的理念:尊重差異,尋求共識,人人發展,讓每一個人都可以傾聽不同的聲音、獲得不同的智慧,在傾聽不同聲音的基礎上,通過思想的碰撞,差異的融合,從而產生新的知識、新的視野、新的智慧. 課後來自西南大學的於澤元教授對兩位老師的課進行了指道和點評.

2013 年 5 月開展了**"追求卓越課堂,提昇數學素養"** 爲主題的研討活動,兩位執教老師按照新課程改革的要求,堅持德育爲先、全面發展、能力爲重、以人爲本,突出**"一切為了每一位學生的發展"** 的核心理念來設計的. 整個活動讓我們看到了青年教師的迅速成長,讓學員經歷了從選課題到研讀教材,從挖掘教材到精心預設,從不斷試講到逐漸成型的全過程,磨練了教學技能、凸顯教學特色,促進了教師的專業成長.

兩年期間還爲學員搭建了區級、市級教學研討的平臺,先後有幾位學員在研討會上上研究課、示範課及說課.

(四)搭建送教下鄉的平臺.

本青研班地處重慶市渝中區,作爲首善之區,發揮輻射作用也是義不容辭的. 青研班首先要求學員做好本職工作,一步一個腳印走進區縣,走進山區,兩年期間先後帶領六位學員

赴長壽、巫溪、武隆送教下鄉,把先進的教育理念和方法傳遞給山區的同仁,開展有針對性、有實效性的教學研討活動. 在聽課教師的陣陣掌聲中,青研班的學員激情投入地上出了各具特色的觀摩課.

學員生動的課堂教學、靈動的教學機智、精彩的教學藝術令聽課的老師們贊歎不已,他們覺得不用走出家門就能觀摩到這樣的精品課,實在是太難得了,希望人和街小學老師經常到山區傳經送寶,眞正起到了以點帶面的輻射作用.

(五)搭建參賽課的平臺.

2011 年 10 月帶領青研班學員陳思怡到天津參加全國說課比賽,榮獲特等獎;2012 年 3 月帶領青研班學員張識榮到上海參加全國說課比賽,榮獲特等獎. 2012 年 4 月帶領青研班學員鄧麗娜到揚州參加全國課堂上課比賽,榮獲上課一等獎;2012 年 9 月年帶領的陳思怡參加第 31 屆"創新杯" 全國教學藝術大賽,榮獲上課比賽特等獎;2013 年 4 月青研班學員何袁靜參加了重慶市的教學競賽課,榮獲一等獎;2013 年 11 月帶領青研班學員張識榮到澳門參加國際大賽榮獲上課一等獎.

幾次參賽活動,在我的精心指道、嚴格要求和專業引領下,經過艱苦磨礪,我們的隊伍在與來自其他省市青年教師的激烈角逐中脫穎而出,取得了良好的效果.

成績是斐然的,而過程是艱苦的. 在這段準備過程中,我以高規格、高水準的指道和高起點、高標準的要求,帶領學員一起研讀教材、對説課和上課稿進行反復推敲. 從教學理念、學情分析、教學目標、教學重難點、教法學法、教學環節上無不精心考慮. 從稿子的撰寫到最後的定稿,從平淡的語言到激情洋溢的演繹,從新穎獨特的教學設計到精美實用的課件製作,,從眼神到手勢,從語言的抑揚頓挫到表情,都精心指道、親自示範並提出詳細可行的建議. 他們經歷了一段難忘而精彩的磨礪,體會了奮鬥的艱辛和成長的快樂,磨課是演繹精彩課堂的過程,也是教師專業成長的最好途徑.

通過一堂堂重點課、研究課、競賽課、隨堂課的打磨,學員們磨出了疑惑與思考,磨出了反思與共享,磨出了教師對自身專業成長的求索與歷練. 使學員意識到要想真正成為一名骨幹教師,必須朝著"博眾家之長,學海納百川,立三尺天地,思睿意進取" 的方向前進.

四、課題研究 立足"草根"

我們主要是以"培養小學生數學素養" 開展行動研究,我們的研究立足"草根",堅持把研究的重心放在教學實踐中,建立起"以研促敎、邊敎邊研、邊研邊敎" 的教育科研方式,要求學員平時要處處留心在日常教學中所遇到的各種教學情境,各種急需解決的問題,特別是有關培養小學生數學素養的問題,並把"教學問題" 作爲一種自己教育科研的日常性研究. 從最基礎、最根本的教育教學問題著手,眞正做到教育科研工作與教學工作相得益彰. 在研究過程中,要求學員以教師和學生的發展爲中心,並進行實踐積累、讀書積累、寫作積累. 做隨時觀察、隨時反思的有心人,並隨時對實踐、困惑、經驗進行詳細的記錄,把自己的有效做法與其他學員交流、切磋,每學期進行一次過程資料交流,生動地向大家介紹自己在

課堂教學實踐中進行課題研究的體會. 學員意識到做課題並不神秘,它需要實實在在的做和長期的積累,而好文章不是寫出來的,是在不斷實踐、不斷研究中做出來的.

蘇霍姆林斯基曾說:唯有科研,才能讓老師們走上幸福的人生道路,通過課題研究,培養了學員教學研究的意識,走上了"在教學中研究,為了教學而研究"的行動研究之路,走上了研究型、專家型、智慧型教師的成長之路.

五、勤於筆耕 學會反思

青研班要求學員在行動研究中勤於筆耕、學會反思、提煉出規律並寫成論文. 剛開始學員的寫作能力較差,因此要讓他們把實踐經驗進行總結提煉,形成論文頗感困難. 爲了提高學員的寫作能力,除了督促學員讀書外,還要求他們堅持寫教育隨筆、教育日記、教學劄記、教學案例分析、教學反思. 對每一次課,每一次活動,每一次講座之後,我都要求學員智慧地"悟",認眞地"思",用心地"體會",眞誠地"交流". 爲了讓學員的寫作水準上一個新的臺階,我常常利用週末、晚上的時間或者乘車時間爲學員修改文章. 爲了讓學員的文章盡快定稿,我不管治療還是走親訪友都把沉甸甸的稿子帶在身邊,一有時間就看,一有建議就及時與學員交流,反復推敲、反復修改、共同斟酌. 每篇文章至少改 3——4 遍,在我的幫助下,學員漸漸養成了反思的習慣. 大家由培訓當初的不願寫、不敢寫、寫不出,逐漸變成敢寫、能寫、愛寫,每個學員的文章由開始的幾百字逐漸變成洋洋灑灑的兩千字、三千字、五千字…… 他們先後撰寫論文、案例、反思、體會、過程資料等近 8 萬餘字,論文獲獎等次也逐漸由三等獎向一等獎邁進. 不斷地通過**"學習 —— 反思 —— 再學習"**,學員的寫作能力、科研能力得到很大的提高.

六、考核基本功力 促進專業成長

要提高課堂教學技能,必須認眞鑽研教材、認眞備課,提高自己的解題能力. 在備課的過程中,不僅要備教材、還要備學生,在教學設計中深挖教材,製造認知衝突,激起思維碰撞,能夠靈活處理好預設與生成的關係. 考核分爲三個部分:

第一部分是解題能力考核:數學教師的解題能力的提昇需要常抓不懈. 事實上,解題是數學教師的立足之本. 要給學生一碗水,老師不能僅有一桶水,而要有源源不斷的更新水. 每學期進行一次解題能力考核,采取閉卷做題,現場批改,道師評析與學員評析相結合,不僅提高了教師的解題能力,更重要的是提高了學員的專業素養.

第二部分是專業知識考核:即教材教法分析,撰寫教學案例,設計教學方案等. 以上考核采取閉卷考試,現場撰寫,分組互評與道師評價相結合進行評分量化.

第三部分是上課能力考核:即隨堂課考核,重難點課考核. 每一次考核後,先由學員談自己的設計意圖,反思自己的教學行爲,然後由我進行認眞詳細的評析. 學員在交流和反思的過程中,不僅提高了課堂教學技能,還提煉出自己的教學特色,學員在不斷磨礪和歷練中,反思教學得失,總結教學經驗,提昇教學技藝,鍛造教學個性,生成教育智慧,促進專業

成長,形成教育思想.

七、收獲成功 分享快樂

兩年來,學員的進步是明顯的,取得的成果是顯著的:

兩年來共有50篇論文獲全國、市、區一、二、三等獎.

有20多篇論文發表在教育教學核心刊物上.

有4位學員參加全國、市級優質課大賽獲上課特等獎一人次,一等獎4人次.

有10位學員參加全國説課比賽獲一等獎7人次,特等獎3人次.

完成了專著《成長路上》,並已在重慶出版社成功出版.

通過兩年的學研活動,我們把先進的教育理念、精妙的教學技巧、靈活的教學方法,滲透和輻射到學研人員的教學中,讓青年教師骨幹培訓班眞正成爲培養骨幹教師的基地,讓青年教師骨幹培訓班成爲人才成長的前沿陣地,使每位學員成爲一名具有高尚的師德師風、良好的教師素養、深厚的文化底蘊、豐富的專業理論知識、豐碩的專業知識和高雅的專業修養、精湛的教學藝術、獨特的教學風格,有思想、有特色的教師.

[注] 翟渝成是小學數學特級教師,也是(2005年9月成立的)重慶市渝中區"翟渝成名師工作室"的專業道師.

學無定法,貴在得法,妙在引道

—— 淺淡小學數學教學中的學法指道技能

重慶市渝中區馬家堡小學　萬莉莉

《小學數學現代教學論》指出:在未來的社會裏,教育的真正意義不在於獲得一大堆知識,而在於掌握學習的方法,學會學習. 現代教育觀念強調以學生爲主,要求受教育者不僅能學到什麼,更重要的是學會怎樣學習. 這充分說明讓學生掌握學習方法、培養自學能力在當前教學的重要性,強調了在小學數學教學中滲透學法指道的必要性. 要使全體學生都得到快速發展,教師必須加強學法指道.

所謂學法指道,指的是教師在教學過程中通過最優途徑,使學生掌握一定的學習方法,並獲得具有選擇和運用適當的學習方法進行有效學習的能力. 它是使學生"學會學習" 的重要組成部分,是數學教學理論研究和實踐中的一個重要課題. 在新課改、新理念的指道下,教師不僅要考慮自己如何教,更重要的是教師要通過一定的途徑對學生進行學習方法的傳授、誘道、診治,把學習方法的"金鑰匙" 交給學生,使學生掌握科學的學習方法並靈活運用於學習之中,逐步形成較強的自學能力,簡單說,即教學生學會學習. 那麼,如何在小學數學教學中有機的浸潤和開展學法指道呢?我一直在不斷探索和思考,並在課堂教學中去實踐.

一、在感知體驗中開展學法指道

在一項教育研究調查中,人們驚奇地發現:憑課堂上的學習成績拿獎學金,美國學生常常不是中國學生的對手,可是一到實踐領域,中國學生往往沒有美國學生那麼機靈,那麼富有創造性,究其原因就在於咱們教育中忽略了對學生實踐能力的培養. 所以,在新課改理念指道下的數學課堂教學,我們要切實把學生的學習同活動聯繫起來,使動手成爲學生理解知識、發展智慧的重要支撑. 同時,在教學中,學生新知識的獲得和能力的獲釋與發展主要是藉助於在系統知識的傳承中得以實現的. 在每節數學課中,教師爲使學生學好重、難點,抓住關鍵點,都會花很大力氣. 然而,在這過程中適時指道學生操作比教師的教授更有助於知識的理解與內化,在操作中,學生可以細細品味知識的結構,理清知識的來龍去脈,充分調動其生活經驗的積極因素,集中思維於一點,誘發靈感火花的閃現,促使其在體驗感悟中將知識化難爲易.

我在教學二年級上冊"鏡面對稱" 時,就如何突破"人和像上下前後位置不變,而左右

相反”這一重難點的處理作了研究和思考. 爲了更好的讓學生認識鏡面對稱,初步感受鏡面對稱的特點,我引道學生通過親身操作體驗的方法來學習和理解知識. 在對知識進行了簡單介紹後,我讓全班學生把鉛筆拿在左手,來到學校那面大大鏡子前,站成5行6列,分排依次照鏡子,並根據我的要求進行操作. 首先,我請同學面對鏡面舉起左手,這時,我再問:那鏡子中的拿筆的手在哪邊呢?同學們都嘗試著動起來,但有的說是左邊,有的說右邊,不同的回答引發了認知衝突,這時我正好讓學生通過操作驗證. 接著,我請兩位同學用操作的方法來證明自己的說法,認爲是鏡中拿筆的手在左邊的同學含含糊糊,半天也沒能說清,但認爲在右手的同學則把自己的左手貼到鏡面上,然後把身體緊貼鏡面側轉180度後,大聲說到:“老師,你看吧,如果這樣的話,我就像鏡子裏的人一樣了,鏡子裏拿筆的手就是在右邊了”.“哦,我知道了”,剛才一頭霧水的同學們一下就恍然大悟了,也模仿著嘗試驗證起來. 我借此契機進行學法指道,我問同學們“剛才大家都不懂的一個問題,經過這個同學的操作,讓我們清楚地理解了知識,那麼,當我們在學習中遇到困難的時候,可以怎麼辦呢?”“可以自己動手操作一下”、“可以自己試一試”,“眞是會動腦筋的孩子,那現實中的人和鏡子裏的像什麼變了,什麼沒變嗎?”一個同學立即回答“我覺得方向變了”,“我覺得左右的方向變了,但上下方向沒變,難道鏡子裏的你倒過來了嗎?”邊說他邊彎下腰示範起來,同學們開始學以致用了.“那前後的方向會有變化嗎?”同學們向前邁一步又向後邁一步,很快興奮的告訴我“老師,上下、前後的方向都不變,只是左右方向變了”. 看來,學生能更有效地運用操作方法了. 回到教室後,我們玩起照鏡遊戲,由我當照鏡的人,讓學生表演出“像”的樣子,進一步鞏固了對鏡面對稱的認識. 接著,我再請兩位同學相對而立,分別扮演照鏡的人和鏡中的像,沒有過多的語言、繁雜的講述,藉助操作體驗的方法讓感受鏡面對稱的性質,知道了照鏡子時鏡子內外的人上下、前後位置不會發生改變,而左右位置發生對換.

《新課程標準》指出**“教師應激發學生的學習積極性,向學生提供充分從事數學活動的機會,幫助他們在自主探索和合作交流的過程中真正理解和掌握基本的數學知識與技能、數學思想和方法,獲得廣泛的數學活動經驗”**. 這節課,由於我讓學生在操作實踐中滲透學法指道,所以同學們上得很投入、學得很有趣、理解很透徹,更讓學生掌握了通過操作來解決數學問題的方法和思想.

二、在操作互動中進行學法指道

動手操作、善於創新的能力是未來人才的重要素質之一. 是從小學會學習、學會生活的重要內容之一,所以在數學課堂教學中,教師要設法創造條件,多讓學生進行“試一試”,“畫一畫”,“換一換”,“擺一擺”,“變一變”等創造技法的嘗試. 引道學生利用操作的學習方法自主探索嘗試,增強學習能力,提高學習的有效性.

新課標提出,要使不同學生在數學上有不同的發展,正因學生之間存在差異,對知識的理解和對方法的掌握有先後之分. 有的學生不僅學會了基礎的知識,還能結合實際巧妙運用甚至創造方法,而有的學生則是想學會而不會學,精力費了不少,可成效甚微,這時教師

的學法指道就更顯重要. 於是,我充分利用學生的差異性,以讓學生互相交流學法的方式進行學法指道. 譬如我在一年級教學比較數的大小時,發現少數學生能很快區分大於、小於號,但仍有部分學生容易混淆,這時,我並不急於告訴他們方法,而是請先記住的學生上臺介紹自己是怎樣快速記住的. 一位學生說老師教學大於號時,我就伸出右手的兩個手指, 比劃出大於號的樣子,教學小於號時,我又伸出左手的兩個手指, 比劃出小於號的樣子;另一位學生說,大於的開口是朝左邊的,小於的開口是朝右邊的;還有學生說,我只記住符號的左邊就行了,左邊是大口就是大於號,左邊是小尖就是小於號. 因爲是同學自己介紹的、自己親眼所見,有榜樣可依的,運用起來會更自如些,孩子們的一番話讓全班同學報以熱烈的掌聲. 我趁勢表揚三位同學,並以此進行學法指道:"他們三人通過觀察、開動腦筋,用比一比、看一看、說一說的方法很快記住了學習的知識,這可是一種好的學習方法哦". 在第二天的練習中,我在強調大小於寫法時,同學們大多能準確的進行區分,很多學生不約而同地伸出手指在面前比劃著. 這種利用學生差異、取長補短的方法,既有效構建了新知,又提高了學生的學習能力,促進學習方法的掌握和運用.

三、在能力培養中强化學法指道

蘇霍姆林斯基認爲,培養學生學習的基本能力,對完成學習任務具有特別重要的意義,學習能力直接奠定著學習方法的基礎. 學法指道的根本目標是教會學生自學,即使學生能獨立地掌握知識、運用知識,形成學生良好的自學習慣,所以培養學生自學能力就成了學法指道的一項重要內容,正因如此,在學生的可塑性較強的一年級,我就十分注重將培養學生能力與學法指道相結合. 由於學習方法的使用和技能技巧的養成都不是一蹴而就的,需要的是持之以恆的不懈努力和矢志不移的一貫追求. 於是我在指道學法前,就通過認眞分析確定了培養目標和步驟,通過對學生觀察能力、傾聽能力、語言表達等能力的培養,讓學生掌握預習、復習、遷移、思考、自學的學習方法,爲落實培養目標,我將它們細化分解到每周的教學過程中.

我認爲,在小學階段的數學學習中,"解決問題" 對於學生是一個學習重點也是難點,要想學生掌握解決難題的能力,從低年級開始,從簡單知識開始培養學生分析、理解和解決問題的能力和方法就顯得尤其重要. 所以我在一年級第三單元"1——5 的認識和加減法"剛開始涉及題目時,就循序漸進地進行學法指道. 首先我指道學生觀察示意圖,從中找出數學資訊並用數學語言表達,接著,我再提高要求,讓學生根據找出的數學資訊提出問題,如"左邊有 3 個紅汽球,右邊有 1 個藍汽球",學生就能提出"一共有幾個汽球?" 的問題,我鼓勵學生用完整的語言進行敘述,並對發言積極、敘述較好的學生獎勵一顆小五星,一顆小五星卻大大激發起全班學生的積極性,**從"我要求說",慢慢變成了"學生主動說"**. 爲鞏固方法,我要求學生做作業時也要先說圖意再寫算式,學生們逐漸掌握了看圖說圖意的方法. 通過一個多月的嚴格要求和扎實奠基,學生學習第六單元"6、7 的認識和加減法" 時,已不再需要我的提醒,就能主動看圖敘述圖意,發言積極性特別高. 這時,我又轉變方法,讓能幹的

學生上臺,帶著全班共同分析理解圖意.“請同學們看黑板”數學科代表小琬也手持教鞭、大方響亮地當起小老師,全班同學的目光都落在圖上,“我看到,圖中有 7 只天鵝,飛走了 3 只天鵝,還剩幾只天鵝?算式是 7 − 3 = 4,同學們,我說得對嗎?”“對”“老師,下一道題讓我來說吧”由於學生有了一定的表達能力和學習方法,才有現在這種積極踴躍的學習勁頭.課堂的四十分鐘過得很快,很多學生仍然意猶未盡,於是,我利用下課時間開展了說圖意的口頭測試,合格者同樣能得到一顆閃閃的小五星.我不僅在課堂上對學生進行能力培養和學法指道,我還藉助口頭作業的方式,讓學生在家充當小老師,向家長進行應用題的分析講解,並由家長打分評價.三天後,在學習“8、9 的加減法應用題”時,我請學生用兩三分鐘時間讓學生獨立看書,嘗試自學,接著,學生們用精彩的發言向我說明,他們完全能夠自主學習這類簡單應用題,掌握它們的分析方法了,這著實讓我感到高興.原本是一堂新授課,由於學生掌握了一定的學習方法,利用原有認知就能在老師的啓發、點撥下主動探究新知,自主學習尋找解決的方法.這不正是學法指道所產生的良好效果嗎?

從九月開學至今約三個月時間裏,通過我一系列的學法指道,學生對應用題的分析、理解、表達能力得到了顯著提高,他們也能運用所學的方法解決實際問題.這既充分發揮了學生的主體作用,調動學生的積極性,又有效發揮了教師的引道作用,滲透了學習方法,培養了學習能力.我想,經過教師們長期有意識地訓練,在潛移默化中,學生掌握了一定的學習方法,就一定能主動學習,主動探索,學習的個性就會得到張揚,在數學上,不同的學生就一定能得到不同的發展.

總之,對學生數學學習方法的指道,要力求做到學法與教法相結合,教師指道與學生探求相結合,統一指道與個別指道相結合.建立縱橫交錯的學法指道網路,促進學生掌握正確、有效的學習方法,才能取得教與學的最佳效果.我們應該把教學的“支點”放在如何使學生掌握一套用之不竭的學習方法上,**使教學達到“教是為了不用教”的境界,實現“要我學 —— 我要學 —— 還要學”的根本轉變,促使學生在牢固掌握基礎知識的前提下,增强學習的內驅力,形成一定的技能,進而使學生的數學素質得到不斷提高.**

參考文獻

1. 歐陽芬著:《有效教學的基本功 —— 新課程下中小學教師學法指道技能指道》.上海,世界圖書出版公司 2008 年版.

2. 蔣宗堯編著:《學法指道藝術》.北京,中國林業出版社 2004 年版.

3. 數學課程標準研製組編著:《數學課程標準解讀》.北京,北京師範大出版社 2002 年版.

4. 董國華主編:《學法指道簡論》.遼寧,瀋陽遼寧大學出版社 1993 年版.

5. 鐘祖榮主編:《學習指道的理論與實踐》.北京,教育科學出版社 2000 年版.

[注]作者萬莉莉是重慶市渝中區馬家堡小學(分管教學)的副校長.

“認識圓”的教學實錄

重慶市渝中區人和街小學　張識榮

教學內容:

義務教育課程標準實驗教科書六年級上冊第 56—58 頁.

教學目的:

1、通過動手操作,學習圓的各部分名稱,發現同一圓內半徑、直徑的特徵及關係,初步學會用圓規畫圓.

2、培養學生的觀察、分析、抽象、概括等思維能力和初步的空間觀念.

3、通過動手操作,主動探索等活動培養學生的創新意識,進一步發展學生的空間觀念,使學生學會用數學知識解釋生活中的實際問題.

教學重點:

學習圓的各部分名稱、特徵及關係.

教學難點:

學習按要求用圓規畫圓.

教學準備:

多媒體課件、圓片、圓規、直尺.

教學過程:

一、創設情景,激趣引入

(一). 創設情境.

師:同學們,你們玩過套圈遊戲嗎?(玩過) 這有一個瓶子,如果有八位同學用圈來套這個瓶子,你們能幫我設計一個套圈遊戲嗎?

設計1:

設計2:

設計3:


師:我們一起來看一看同學們的設計,你有什麼意見嗎?

生 1:設計 1 和設計 2 中,同學這樣站不公平,因爲這八個人到這個瓶子的距離不相等.

生 2:設計 3 中,同學這樣站是公平的,因爲他們到這個瓶子的距離相等.

師:只有距離相等才是公平的!如果 16 個人來套,這樣站公平嗎?(公平)32 個人呢?(公平)如果我們全班同學甚至全校的同學都同時公平的來套這個瓶子,這些人最終會圍成一個什麼樣的圖形?(圓形).

(二). 揭示課題.

師:這節課咱們就一起來認識圓,齊讀課題.

(三). 欣賞生活中的圓.

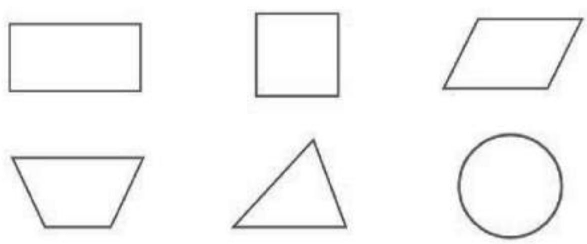
師:生活中,圓處處可見,老師這裏收集了一些,請同學們欣賞!

【**評析**:讓學生設計熟悉的套圈遊戲,使學生體會八位同學只有到瓶子的距離相等來套圈才是公平的,從而蘊涵了圓的本質特徵"圓是到定點的距離等於定長的點的集合",使學生在感受極限和集合思想的同時水到渠成地建立起了圓的直觀模型;與此同時播放生活中的圓形,優美的畫面不僅喚醒了學生的生活經驗,而且激發了學生的學習興趣,讓他們感受到圓的外在美,也進一步爲探究圓的內在奧秘打下了認知基礎和情感基礎.】

二、探究新知

(一). 認識圓各部分名稱.

師:生活中有圓的地方眞是太多了!你覺得圓與我們學過的下述平面圖形有什麼不同呢?



生:圓是彎的,其他圖形是由線段圍成的.

師:對,圓與眾不同的是它是由曲線圍成的.

【**評析**:讓學生通過將圓與已學過的平面圖形的比較,能夠直觀而快捷地使學生明確圓是由一條曲線圍成的封閉圖形,這樣把將要學的新知識建立在學生已有經驗和認知的基礎上,使學生不覺得陌生.】

師:老師給同學們準備了圓,舉起來看看!現在跟老師一起折一折:先對折,打開;再換個方向對折、再打開……

師:把手裏的圓片打開,說一說你觀察到了什麼?

生:我發現圓上有很多折痕,這些折痕相交於一點.

師:你們也發現了嗎?(發現了)同學們觀察得很仔細. 圓的各部分名稱到底是什麼呢,看書是一種很好的學習方法!讓我們一起走進教材,看看第 56 頁的最後一自然段告訴了我

們什麼.

師:這一段話有幾個句號?(3 個) 誰來讀一讀第一句話.

生:這些折痕相交於圓中心的一點,這一點叫做圓心.

師:通俗的講,圓心就是圓的中心,舉起手裏的圓片,用手指指到圓心. 誰上來找出這個圓的圓心.

師:相交的點有名字了,這些折痕呢?

生:連接圓心和圓上任意一點之間的線段叫半徑.

師:請集中注意力看,圓上任意一點在這裏嗎?(老師指着圓外的點) 這些點都在圓外,是這裏嗎?(老師指着圓內的點) 這些點都在圓內;圓上任意一點究竟在哪裏呀?誰來指一指?

師:還有嗎?有多少個這樣的點?(無數個).

師:任意一點就是圓上無數個點中的一個點. 請你來給大家畫一條半徑,並用字母 r 來標出來.

師:畫得很標準,請回.

師:除了圓心和半徑,在圓中還有一個很重要的名稱是什麼呀?(直徑) 那什麼是直徑呢?

生:通過圓心,并且兩端都在圓上的線段.

師:請看老師畫,直徑也就是我們剛才把圓對折時候的折痕.

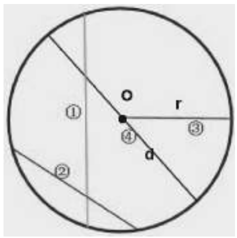
師:同學們再相互說一說什麼是圓心、半徑、直徑.

師:請大家一起告訴我,什麼叫半徑?什麼叫直徑?

練一練.

1. 找一找.

師:那我們就用剛才所學的知識來找出這個圓的半徑與直徑分別是幾號線段?



2. 畫一畫.

師:接下來請同學們標出你手中圓的圓心、畫出一條半徑、一條直徑,並用字母表示出來.

【**評析:**數學活動應該是從學生的生活經驗和已有的知識背景出發,向他們提供充分的從事數學活動和交流的機會. 學生通過折一折、畫一畫、說一說、看書自學、操作演示理解了圓心、半徑、直徑的概念,這樣的設計讓學生從多種管道自主探究,有利於學生參與知識的形成過程,促使學生對抽象的數學知識的理解,使他們對數學產生濃厚的興趣和親切感. 同時在此設計相應的練習,可以很好的鞏固新知. 】

(二). 深入探究圓各部分關係.

師:請你們再畫出 2 條半徑!如果讓你再畫出 20 條半徑,行嗎?(行) 如果讓你一直不停的畫,你能畫多少條?(無數條).

師:爲什麼呢?

生:因爲圓上有無數個點,所以就能畫出無數條半徑.

師:半徑有無數條,那直徑有多少條呢?

生:也是無數條.

師:對,同樣的道理也是無數條.

師:同學們你們知道嗎,這無數條半徑、直徑之間還蘊藏著許多知識呢. 想一想,在同一個圓裏,半徑和半徑的長度有什麼關係?(同圓裏)直徑和直徑的長度有什麼關係?(同圓裏)半徑和直徑的長度有什麼關係?到底你們的想法是否正確呢?實踐出眞知,請同學們拿出圓片、直尺等研究工具,自己想辦法去驗證你們的想法吧.

師:同桌的同學把你的結果和方法交流交流.

師:好,就讓我們一起來分享大家的成果吧!你用的是什麼方法來驗證的?

生1:我量了我手裏這個圓片的半徑,都是2.5釐米長;直徑都是5釐米;所以同一圓裏,半徑或直徑的長度都相等,半徑是直徑的一半,直徑是半徑的2倍.

師:你手中的圓和黑板上的圓半徑一樣嗎?那應該怎樣準確表達?(同一圓裏).

師:還有哪些同學也是用量的方法來驗證的?得出一樣的結論了嗎?

師:除了量,還有別的方法嗎?

生2:我折了一下,這個圓片的半徑長度是相等的,直徑是半徑的2倍.

師:還有哪些同學是用折的方法來驗證的?也得出一樣的結論了嗎?

師:剛才你們通過量、折都得出了同一圓裏各部分之間的關係,我們就用剛才發現的知識來塡一塡.

同一圓內	半徑	$5cm$		$0.8m$
	直徑		$14dm$	

【**評析**:給學生創設一個寬鬆的學習氛圍,留給學生自主學習的空間,讓他們自主去探究,這樣的設計更突出了對學習過程的重視. 讓學生自己動手在圓上畫一畫半徑和直徑、量一量,並通過相互交流、補充、啓發,理解圓的各部分的關係,不僅使學生的認識從具體上昇到抽象,而且使學生感悟了研究數學問題的基本方法. 同時學生在動手操作中發現、總結圓的各部分的關係,使學生感到自己也是發現者、研究者、探索者,從而感受到成功的喜悅.】

(三). 課件重播到引入圓.

師:我們在做套圈遊戲的時候,這裏的瓶子就相當於圓的——圓心,每個人就相當於圓上的——一個點,每個人到圓心的距離就相當於圓的——半徑. 因爲同一個圓的半徑都相等,所以站成圓形來套圈是公平的!

師:其實,早在二千多年前,戰國時期的《墨經》裏就有了關於圓的精確描述:圓,一中同長也.

師:知道這裏的"中"指的什麼嗎?(圓心)"同長"又是指的什麼呢?(半徑、直徑長度相等).

師:這句話的意思就是在同一個圓裏,半徑或直徑的長度都相等. 這一發現,比西方早了一千多年,此時作爲中國人,你有什麼感想?

生:作爲一個中國人,我感到非常自豪、驕傲和震驚.

師:我和你們的感受一樣,讓我們懷著對古人的崇敬和作爲中國人的驕傲,大聲地把這句話大聲的讀出來.

【**評析:**在學生認識了圓的基本要素,學習了圓的各部分之間的關係之後,通過介紹墨子對圓的描述“圓,一中同長也”,不僅使本課前後呼應,而且進一步彰顯了圓的文化內涵,同時讓學生感受到我國數學文化的歷史悠久,進而萌發民族自豪感,激發學習興趣.】

(四).學習用圓規畫圓.

師:我們已經認識了圓,接下來動手畫一個圓好嗎?(好)先說說你都知道哪些畫圓的方法呀?

生:用圓規畫圓;用圓形的物品如瓶蓋描出一個圓;體育老師在操場上用繩子畫圓……

師:同學們知道的可眞不少!怎樣才能又規範又方便的畫出一個圓呢?

生:用圓規畫圓.

1. **認識圓規,並嘗試畫圓.**

師:那我們一起來認識圓規,圓規的兩腳一個是針腳、一個是筆腳,并且兩腳可張開不同的大小.畫圓時,我們先將針腳固定好,然後捏住手柄將筆腳旋轉一周就可以畫一個圓了,在作業本上嘗試著畫一個吧.

(展示學生畫的圓)

師:說一說你是怎麼畫的?

師:老師還沒有教,你們也能畫出漂亮的圓.

2. **教師在黑板上示範畫圓.**

師:老師也想畫一個圓,要正確地畫圓,先做什麼?

生:確定圓心.

師:如果我把圓心定在黑板上,圓就畫在(黑板上);如果把圓心定在講臺上,圓就在講臺上;如果……由此可見,圓心決定了圓的什麼?

生:圓心決定了圓的位置.

師:定了圓心之後,接著做什麼?

生:定半徑.

師:我要畫一個半徑爲 20 釐米的圓,圓規兩腳之間的距離是多少?

生:圓規兩腳之間的距離爲 20 釐米.

師:最後做什麼?(旋轉)這時要注意什麼?

生:捏住手柄、將圓規略微傾斜,針腳稍加用力就可以使兩個針腳的距離保持不變了.

3. **按要求畫圓並展示.**

師:請同學們再按要求畫一個圓吧.(畫一個半徑爲2釐米的圓,並用字母 O、r、d 分別標出它的圓心、半徑和直徑).

師:這兩個圓畫得怎麼樣?(展示學生畫的圓).

生：第一個畫的很好，畫第二個圓的時候可能圓心或者是圓規兩腳之間的距離發生了一些變化道致沒有畫好.

師：同學們評價得很到位，我們要注意的是圓規兩腳之間的距離就是半徑，并且在畫圓時半徑和針腳應該是保持不變的.

師：同學們比比，你們畫的圓和老師在黑板上畫的這個圓，哪個大一些，這是爲什麼呀？

生：因爲它們的半徑不同.

師：那半徑有什麼作用？

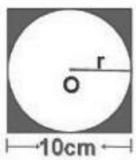
生：半徑確定圓的大小.

【**評析：**通過學生自己想辦法畫圓和用圓規畫圓，讓學生進一步體會到圓是到定點的距離等於定長的點的集合，使學生從表面上膚淺地認識圓，逐步上昇到對圓比較理性的本質認識. 同時讓學生通過畫圓，明白圓心決定圓的位置，半徑決定圓的大小，培養了學生概括表達的能力，發展了學生的數學思維. 】

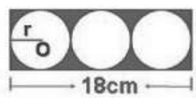
三、實際應用，深化新知

（一）. 看圖填空.

師：我們已經認識了圓，也畫了圓，接下來就用我們所學的知識來"看圖填空". 請先完成在作業紙上.



r=（5）cm



r=（3）cm

生 1：正方形的邊長就是圓的直徑，所以它的半徑是 5 釐米.

生 2：長方形的長相當於圓直徑的 3 倍，所以直徑是 6 釐米，半徑就是 3 釐米.

師：眞會觀察，這道題的關鍵就是找到圓和長、正方形之間的關係.

（二）. 車輪動畫欣賞.

師：老師今天還給你們帶來了一組精彩的動畫.（裝有如三角形、正方形、長方形、橢圓形車輪的車顛簸行走的動畫）.

師：看了這段動畫之後你們有什麼感想？

生：這些形狀的車輪使車走起來很顛簸，不平穩，要把車輪做成圓形的走起來才會很平穩.

（立即出現車輪做成圓形的但車軸不在圓心的動畫）.

師：車輪更換成做成圓形的了，爲什麼車走起來還是很顛簸呢？

生：因爲車軸沒有安裝在圓心的位置，要把車輪安裝在圓心的位置車走起來才平穩.

（出現圓形車輪並將車軸安裝在圓心的動畫. ）

師：看來不僅要把車輪做成圓形的，還要將車軸裝在圓心的位置，這是爲什麼呀，能用今天所學的知識來解答嗎？

生：車軸到地面的距離才始終是相等的. 這裏運用了同一圓內，半徑都相等.

(三).視頻欣賞.

師:圓的知識在生活中應用還非常廣泛,比如在舉行國際或國內重要會議時,參會人員通常圍圓桌而坐;籃球比賽開球時,裁判員通常會高舉著球站在中圈圓心的位置,兩隊的球員都站在圓外準備搶球;生活中,小朋友們在玩遊戲的時候,街上的行人在看表演、看熱鬧時,常常也會不由自主的圍成圓形或半圓形.

師:不僅如此,圓還悄然走進了藝術的殿堂.(出示千手觀音視頻)這是舞蹈千手觀音,舉起你的小手,咱們一起來找出裏面近似的圓,在這裏你能夠感受到圓的婀娜多姿嗎?

【**評析:**練習設計生動形象,三角形、正方形、長方形、橢圓形的車輪配之以逼真的動畫,演示出行走軌跡,形神兼備,圓"到定點的距離等於定長"這一核心知識點形象而深刻的印在學生腦海中;圓桌會議、千手觀音不僅是"圓,一中同長"的體現,而是一種創造與美的完美結合,體現了圓的內涵,彰顯了數學給生活帶來的無窮魅力.】

四、總結

師:通過今天的學習,說一說有什麼感受吧?

師:今天同學們讓老師感受到了你們的聰明與智慧,你們通過自己的努力,爲今天這節課畫上了一個完美的句號,但張老師希望同學們將這個句號變爲新的起點,把學習的半徑越畫越寬.

[注] 重慶市渝中區人和街小學張認榮老師以"認識圓"一課參加澳門"2013年嘗試教育理論研究華人論壇"小學數學上課比賽,獲一等獎.

化難為易找規律

培道中學　樑嬋娟

【教學內容】人教課標版教材六年級下冊,第六單元總復習 $P91$ 的內容和相關習題.

【設計理念】

《找規律》這節課是六年級下冊總復習中"數與代數" 的一個內容,教材要呈現給學生的是如何體現找規律對解決問題的重要性.《找規律》它蘊含著深刻的數學思想,是學生今後學習、生活最基礎的知識之一. 本節課教材呈現的規律的一般化表述是:以平面上幾個點爲端點,可以連多少條線段?這種以幾何形態顯現的問題,便於學生動手操作,通過畫圖,由簡到繁,發現規律. 解決這類問題的常用策略是,由最簡單的情況入手,找出規律,以簡馭繁. 這也是數學問題解決比較常用的策略之一.

1. 抓住數學本質,體現數學味.

2. 讓學生體驗尋找數學規律的過程.

學生進行有效地建構數學知識的活動,平面內點與線段的關係是一個極具探究價值的問題,讓學生通過探究得到這些規律性的知識,這樣將使得學生親自參與到知識的"建構"中去,使學生眞正成爲建構者,而不是簡單的模仿者.

3. 讓學生經歷應用數學的過程.

數學來源於生活,高於生活,用於生活. 這節課在總結出 N 個點可連出多少條線段的規律後,通過若干年後同學聚會的生活情境,讓學生感受這條規律在生活中是有用的,這樣通過讓學生走向生活,了解數學知識在實際中的廣泛應用,讓學生體會到數學規律性知識對解決生活中的實際問題的重要性.

4. 讓探究更深入有效.

鞏固練習設計"9 個 1"(111111111) 乘"9 個 1"(111111111) 等於多少?還有 12345679 乘 81 = ?目的是讓學生感悟到化難爲易的數學思考方法,同時運用這種數學思考方法解決問題.

【教學目標】

1. 通過引道學生觀察、探究、記錄、歸納,得到解決"幾個點能連成多少條線段?" 這類問題的方法.

2. 滲透"化難爲易" 的數學思想方法,能運用一定規律解決較復雜的數學問題,進一步積累解決問題的策略.

3. 培養學生歸納推理,探索規律的能力.

4. 讓學生在體驗中感受數學知識的奇妙,感受數學思維的樂趣,在探究中獲得成功的愉悅感,激發孩子們進一步學習與探究的欲望.

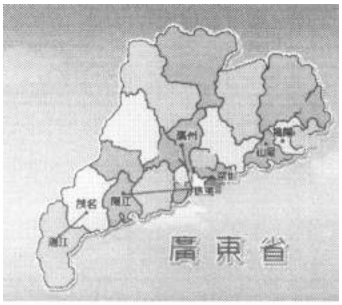
【教學重、難點】引道學生發現規律,找到解決問題的方法.

【教學過程】

一、創設情境,生成問題

(一)談話設疑.

師:同學們,在上課前,咱們先來做個遊戲,挑戰一下自己,敢不敢 …… 請聽清楚要求:有 8 座城市的地圖,要求學生連一連,看一共可以開通幾條航線?



我們把 8 座城市看成 8 個點,現在卡片上有 8 個點,每兩個點連成一條線段,一共可以連成多少條線段呢?請同學們動筆連一連,再數一數,時間 2 分鐘,看誰最先得出答案!

(二)學生動手操作,彙報交流.

師:同學們,有結果了嗎?(學生彙報結果)

怎麼會有這麼多不同的答案呢?可正確的答案只有 1 個!到底誰的答案才是正確的呢?看來這個問題可能有點難度!(板書:難)沒關係!我們暫且把它放在一邊,待會兒再去評判,下面我們先開始今天的學習與研究,看看大家能不能從中得到什麼啓示.

二、探索交流,解決問題

(一)從簡到繁,感知算理.

師:同學們,用 8 個點來連線,我們覺得很困難,如果把點減少一些,是不是會容易一些呢?下面我們就先從 2 個點開始,

師:(黑板點出兩個點)你們看到了什麼?(生答)"通過"兩個點連成一條線段容易嗎?我們就從簡單的問題入手開始研究,兩個點可以連成幾條線段?(生答). 能而且只能連成 1 條線段,請同學們動手將這條線段連出來!(學生操作,板書)

點數	•——• 2 點
增加條數	
總條數	1

(動態連出 AB,課件出現相應資料,如右圖)

師:在兩個點的基礎上增加 1 個點,這時候一共可以連成幾條線段?(學生猜想:動筆,得出答案.)

師:只增加了一個點,爲什麼卻增加了 2 條線段呢?(引道學生明確:增加的一個點可以和原有的兩個點分別連成一條線段,所以在原有基礎上增加了兩條線段. 這樣,就在學生的腦海中建立了一個"1 + 2"的連線網路影像)

師:你說得很好!

誰上來試試?生演示,你們的答案與他的一樣嗎?

爲了便於觀察,你能用一個式子表示出從 2 個點到 3 個點連出線段的一個動態過程嗎?(板書)我們把這次連線情況也記錄在表格裏(課件動態演示,如右圖).

點數		
	2 點	3 點
增加條數		+2
總條數	1	1+2

同學們能用數學的語言來表示能體現我們要表達的數學思想,大家眞棒.

師:在3 個點的基礎上又增加1 個點,共有多少點了?(4 點)你猜可能會增加幾條線段?(生回答)

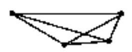
師:怎麼會是 3 條呢?剛才兩個點時,增加一個點. 只增加了 2 條線段啊!(學生釋疑,動筆驗證.)

一位學生黑板演示.

師:你能告訴大家,第 4 點時,你增加了多少條線段?

那麼 4 個點可以連出幾條線段?(生:4 個點可以連出6 條線段. 這個結果與第1 次、第2 次相比發生的變化用一個式子怎麼表示呢?(板書)

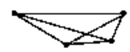
(根據學生回答課件動態演示連線過程,如右圖)

點數			
	2 點	3 點	4 點
增加條數		+2	+3
總條數	1	1−2	1+2−3

師:請同學們想一想:5 個點一共可以連成多少線段呢?6 個點、7 個點、8 個點呢?小組合作討論. 引道學生進行數學思考並將你們的思考記錄在工作紙上.

師:誰把你們組的想法和大家交流一下. 一位學生在黑板上演示.

(課件根據學生的回答,同步演示板書,課件動態演示連線過程,如右圖)

點數				
	2 點	3 點	4 點	5 點
增加條數		+2	+3	+4
總條數	1	1+2	1+2+3	1−2+3+4

(二)分步指道,逐步列出求總線段數的算式.

師:剛才我們已經演示了 5 個點、6 個點、7 個點時連成線段的總數,現在請同學們仔細觀察表格中的幾組資料:

師:仔細觀察這張表格,在這張表格裏有哪些資訊呢?

(引道學生明確:2 個點時總條數是1,3 個點時就增加2 條線段,總條數是3;4 個點時增加了3 條線段,總條數是6;5 個點時增加了4 條線段,總條數是10;到6 個點時增加了5 條線段,總條數是 15.)

師:那麼,看著這些資訊你有什麼發現嗎?

(學生嘗試回答出:2 個點時連1 條線段,增加到3 個點時就增加了2 條線段,到4 個點時

就會再增加3條線段,5個點就增加4條線段,6個點就增加5條線段. 每次增加的線段數和點數相差1.)

師也可以提問引道:當3個點時,增加條數是幾?(生:2條) 那點數是4時,增加條數是多少?(生:3條) 點數是5時呢?(4條)6時呢?(5條) 那麼,你們有什麼新發現?師小結:我們可以發現,每次增加的線段數就是(點數 -1)(板書:點數)

邊解說邊板書

2點共連:

3點共連:

4點共連:

5點共連:

…….

(三)觀察算式,感知規律.

師:請同學們仔細觀察這幾道算式,你有什麼發現?(引道學生從演算法、加數的特點、加數的個數等方面區觀察發現……)

師:是的,這每一道算式都是一組從1開始的連續自然數之和. 到底幾個連續自然數相加呢?

N點共連呢,你還有什麼發現?你能用一個數量關係來表示你發現的規律嗎?(得出加數的個數與點數之間的關係)

引道學生在觀察,彙報、交流的過程中感知規律.(提示並板書課題)

(四)回應課前遊戲的設疑,進一步提昇.

學生找到課前遊戲的答案. 與學生共同探討問題由難變易的原由.

現在我們就知道了課前遊戲的答案,在紙上任意點上8個點,每兩點連成一條線,可以連成28條線段. 有這麼多條,難怪同學們數時會比較麻煩呢!看來利用這個規律可以非常方便的幫助我們計算點數較多時的總線段數. 下面你們能根據這個規律,計算出12個點、20個點能連多少條線段?(學生獨立完成)

(五)回顧整個思考過程總結數學思考的方法(采用老師說前半句話,學生回答後半句話的方式進行).

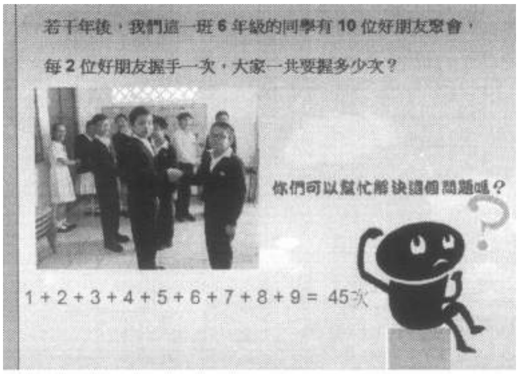
回顧一下剛才我們解決問題的過程,剛開始"8個點每兩點連成一條線,可以連成幾條線段"這個問題對於我們來說比較難,爲了發現其中的規律,我們改變資料的大小,利用畫的方法從小資料入手去發現規律,將難的問題變容易. 這種化繁爲簡的方法在數學思考的過程經常用到,是一個很好的辦法.

三、鞏固應用,內化提高

1. 你能運用規律解決更復雜的問題嗎?

(出示:根據規律,你知道12個點、20個點能連成多少條線段嗎?請寫出算式.)

2. 學生練習.



還原生活,解決問題,出示:10 個好朋友,每兩位好朋友握手一次,大家一共要握手多少次?

師:你們能幫他解決這個問題嗎?小組同學互相說說!(小組合作交流,之後學生回答:這道題其實就可以把它轉化爲我們剛才解決的連線問題. 那麼答案就是 $1+2+3+\cdots+9=45$)

師:同學們,在我們生活中有許多看似復雜的問題. 我們都可以嘗試從簡單問題去思考,逐步找到其中的規律,從而來解決復雜的問題. 下面我們就來看看書上的幾道練習題,看看能不能運用這樣的思考方法去解決它們.

3. 針對問題,運用知識,找出規律,巧解問題.

(拓展提高,自我挑戰):

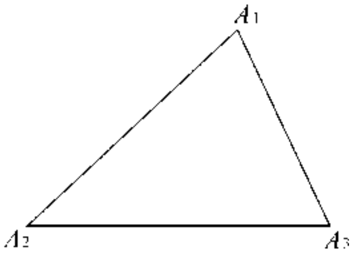
1) $111111111 \times 111111111 = ?$

2) $12345679 \times 81 = ?$

以上題目均由學生解決,並闡述理由.

下面的拓廣題可供有餘力的資優生作探索研究:

3) 三個球隊進行單循環比賽(參加比賽的每一個隊都與其它所有球隊各賽一場),總的比賽場數是多少?四個球隊呢?五個球隊呢?寫出幾個球隊作單循環比賽總的比賽場數公式.



[**思考一**] 可按教案中"8 個點連線問題" 的解法思路解題.

[**思考二**] 設球隊分別爲 A_1, A_2, A_3.

由 A_1 連 A_2,得線段 A_1A_2,由 A_2 連 A_1,得線段 A_2A_1. 但 A_1A_2 和 A_2A_1 是同一條線段,因此 A_1, A_2 的連線僅一條. 由 A_1 出發連 A_2, A_3 共有 2 條線段,共賽 2 場即 $1 \times 2 = 1 \times (3-1)$.

把 A_1 換成 A_2 及 A_3,則 A_1, A_2, A_3 三球隊作比賽共賽 $3 \times (3-1)$ 場.

但 A_1A_2 與 A_2A_1, A_1A_3 與 A_3A_1, A_2A_3 與 A_3A_2 是同一條線段,球隊比賽是同一場比賽,因此要改 2 爲 1(除以 2),因此 A_1, A_2, A_3 三隊作單循環比賽的總場數應是 $\frac{3 \times (3-1)}{2}$ 場.

把 3 改爲 $4, 5, n$,則比賽場數分別是:

4 個球隊作單循環賽,比賽的總場數爲 $\frac{4 \times (4-1)}{2}$ 場;

5 個球隊作單循環賽,比賽的總場數爲 $\frac{5 \times (5-1)}{2}$ 場;

n 個球隊作單循環賽,比賽的總場數爲 $\frac{n(n-1)}{2}$ 場.

四、回顧整理,反思提昇

同學們,通過本節課的學習,你有哪些收穫?

師:今天同學們都表現得非常棒,我們運用了化難爲易的數學思想方法,解決了一些問題. 希望同學們在以後的學習中經常運用數學思想方法去解決生活中的問題.

板書設計:

化難爲易找規律:

2 點共連:1(條).

3 點共連:$1+2$(條).

4 點共連:$1+2+3$(條).

5 點共連:$1+2+3+4$(條).

6 點共連:$1+2+3+4+5$(條).

N 點共連:$1+2+3+4+5+\cdots\cdots+(n-1)$(條).

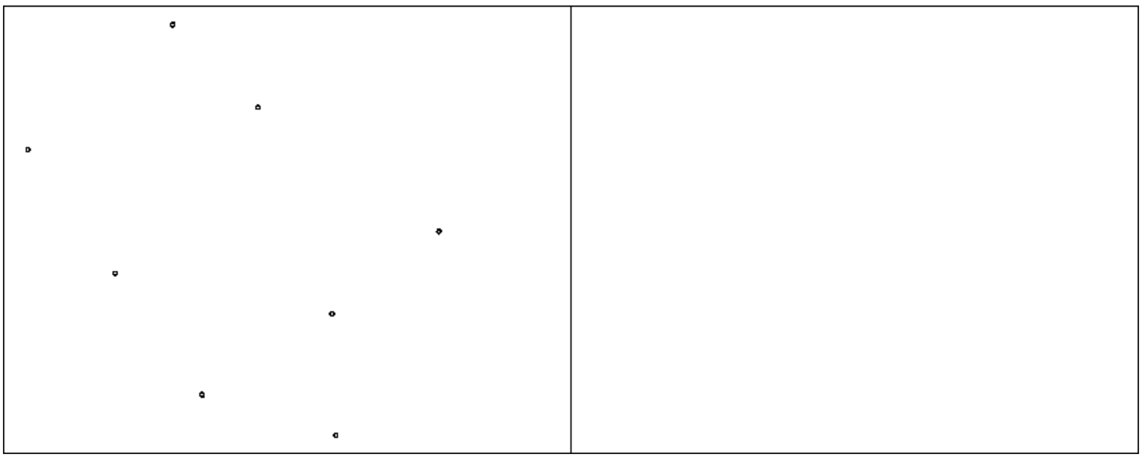
附:學生工作紙

化難爲易找規律

練習題

姓名:________ 日期:________

(二)8 點連線段:



(三)12 點可連多少條線段? 20 點呢?

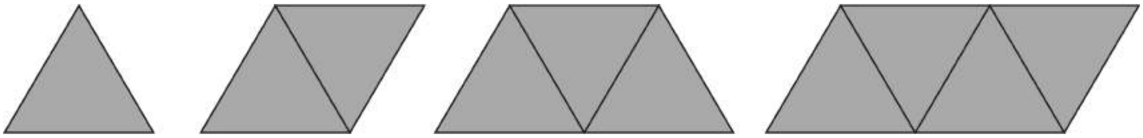
(四)10 個好朋友相聚,每兩人握手一次,他們一共要握手多少次?

(五) 看規律填數字:

1. 75,3,74,3,73,3, ____, ____.

2. 1,3,4,7,11,18, ____, ____.

(六) 看一看,找規律:



(1) 第 6 個圖形是甚麼圖形?

(2) 第 7 個圖形有多少條線段?

(3) 三個球隊進行單循環比賽(參加比賽的每一個隊都與其他所有球隊各賽一場),總比賽場數是多少?四個球隊呢?五個球隊呢?寫出 n 個球隊進行單循環比賽的比賽場數公式.

[注] 澳門培道中學梁嬋娟老師的《化難爲易找規律》一課參加澳門"2013 年嘗試數學理論研究華人論壇"上課比賽獲一等獎.

關於不同幼兒教育理念的展示

澳門數學教育研究學會　石　瑋

有的教育家認爲兒童的發展有兩個最重要的影響因素:一是遺傳,另一個則是環境. 意大利教育家蒙特梭利博士認爲幼兒並不需要成人的教道. 成人要做的只是爲幼兒預備一個對的環境,在這環境中的空間布置、成人、玩具等所有的一切都會對幼兒的發展造成關鍵性的影響.

如果家有三歲孩子,爲了把孩子培養成材,不輸在起跑線上. 家長應該爲孩子選擇甚麼樣的幼稚園最適合?家庭配合甚麼樣的教育最好?這是家庭中父母、祖父母最爲關注的問題. 帶著這個問題,澳門數學教育研究學會於今年 5 月中旬,在澳門勞工子弟學校幼稚園舉辦了幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課. 前來參加者有幼兒教師、初小教師、中學教師、家長、學校行政領道,座無虛席.

在幼兒教育理論方面,由中國教育會幼兒研究會理事長、南京師範大學教育科學院虞永平教授作了關於"如何推動幼兒教育發展研究" 的專題講座. 他指出,幼兒是一個特殊的群體;在幼兒教育中,要以直覺思維爲主;培養他們富有想像力和創造力,遊戲是基本的活動方式;教幼兒沒有規定教材,幼兒不學文化課;區域活動是幼兒主要的學習方式,要求教師在開展幼兒區域活動的備課中,突顯出培養他們的多向思維,特別是創意思維,如今國內幼兒教育以《幼稚園教育指道綱要(試行)》爲綱開展教學活動.

接著,由全國一級優秀幼稚園——肇慶實驗幼稚園的伍艷媚老師做了生動、活潑、有趣的幼兒課堂教學. 上課伊始,伍老師問孩子們:"你們游過泳嗎?". "游過". 她帶領孩子們做著游泳的動作,在教室內走了幾圈之後,問:"若海中有鯊魚,怎樣把同學安排在三個小島上",那小島是用三塊膠墊來代替的,孩子們都爭先恐後站在小島上,但有人掉進"海里"(站在膠墊邊緣的幼兒,位置小,站不住腳). 然後,老師發給每人一張 A4 紙,用 A4 紙來代表小島,在紙上扣圓圈來表示安排人的方案,讓孩子們設計怎樣安排不會掉海里. 孩子們十分投入,在比較設計方案時,可看出哪些孩子的設計有創意. 爲了舒緩孩子們剛才的緊張情緒,還有五分鐘下課,她與孩子們在歡樂的舞蹈中結束了這堂課.

其實,幼稚園各科教學和遊戲活動都蘊涵著豐富的挫折教育因素,教師要善於發掘和運用,把挫折教育寓於各科教學和遊戲之中,同時鼓勵幼兒積極嘗試,尋找戰勝困難的途徑和方法. 遊戲是幼兒最基本的、最喜歡的活動,在遊戲活動中容易讓幼兒接受和掌握戰勝挫折的方法. 如在角色遊戲中,可安排幼兒分別扮演人際關係衝突中排斥和被排斥的角色,讓

他們體會不同的心理感受,引道他們分析產生衝突的原因並尋找解決問題的途徑和方法.

幼兒期是個性形成的關鍵期,幼兒的心理健康與否對以後能否適應社會環境,承受生活挫折有著密切的關係. 前蘇聯教育家馬卡連柯說:“對一個人的教育成功與否取决於五歲以下的幼兒期”.“孩子將成爲怎樣的人,主要取决於家長在五歲以前把他造成什麼樣子”. 換句話說,如果家長的培養忽視了孩子五歲以前的情感、社會性以及長遠的發展,將得不償失.

幼兒教育理論與實踐告訴我們,家長越肯花時間和孩子進行創造性的遊戲和玩耍、經常給孩子讀書、和孩子進行有趣味和有思想的交談,孩子們智力發展就越健康. 雖然我們是中學教師,但是爲了把孩子培養成材,不輸在起跑線上. 也常常犧牲這樣的天倫之樂,用大量生詞卡對自己的孩子進行填鴨式的灌輸,用學術化的課程佔據孩子的童年. 常言道:“隔行如隔山”. 如今在科技發展日新月異的時代裏,在同一行業,分類不同的部門裏,也似“隔山”了. 其實,這樣可能使孩子的智力發展變慢或過早出現厭學情緒.

爲進一步研究嘗試教學理論的科學性和普遍性,以及提昇幼兒教育工作者的教學與理論水平,澳門大學教育學院和澳門數學教育研究學會又在 11 月 16 日至 17 日在澳門大學舉辦了“嘗試教學理論研究華人論壇”及“幼兒教育報告會”活動.

臺灣的中華數學協會理事長、臺灣奧林匹克文教集團總裁蔡坤龍教授及其同行學者作了關於“如何開發幼兒左右腦”的學術報告. 其中一個議題是如何對幼兒進行智力開發之“奧林匹克幼兒更聰明的七大原則”如下:1. 教小孩尋找規律的方法(簡單加減法練習);2. 教小孩靈活機智(平面幾何圖形方面的練習);3. 教小孩有系統的計數(立體幾何圖形方面的練習);4. 教小孩靈活的巧算(數字的交換律和結合律);5. 教小孩嘗試錯誤(平面幾何圖形與計數方面的練習);6. 教小孩自己發現定理(平面幾何圖形方面的練習);7. 教小孩如何推理(數字計算).

從以上按七大原則編寫的訓練題目的內容來看,這樣的題目的訓練,不帶有一般性. 對於幼兒來說,一些習題頗費思索,不適合培養多數幼兒,只是培養少數精英的幼兒之路. 但肯定地說,卻是培養奧林匹克數學人才之路,正符合一些幼兒家長的願望. 爲此,他們編寫了多種相關教材,研製了多種教具. 據說他們的教學也頗受當地幼兒家長們的歡迎. 聽聞國內一些“超綱”教學、生源足的幼稚園,也是開設課程較多的幼稚園,并且是受家長歡迎的幼稚園.

可以肯定他們的幼兒教學理念與國內《幼稚園教育指道綱要(試行)》的教學理念不同.

如果按照國內《幼稚園教育指道綱要(試行)》開展教學活動,幼稚園的孩子完全可以度過一段輕鬆快樂的學前時光. 針對幼稚園教育小學化現象,國內有些地方教育部門已經主動開始對幼稚教育溯本清源.

經過調查,接受過“超前教育”的幼兒在入小學前就掌握了小學的知識,所以他們對小學老師講的課根本聽不進去,上課時對重復學習不感興趣,精神上常常“開小差”、做小動

作. 這些不良的學習態度和學習習慣一旦形成,對其以後的學習和將來的發展都會帶來不利的影響. 從孩子的普遍性來看,一些中國家長重視對孩子早教的思想,是不符合幼兒教育學的.

在世界名利前茅的芬蘭教育,透過零到七歲的幼兒及學前階段,以輕鬆自在、非正式的活動方式,不急躁、不求快、不用紙筆記憶訓練、不需要證明給父母看的學程節奏,強調以孩子個人的發展爲中心,讓不同背景的孩子單純地共同相處. 老師們專注付出心力所做的,就是透過各式的主題活動協助孩子發展,讓孩子以玩耍與遊戲的學習“課程”,奠定日後發展成人所需的身心平衡的健康基礎. 因此,芬蘭的學前教育是爲了協助每個孩子開啓學習之路而設. 芬蘭小童會主動想、主動問、主動找答案,這就是芬蘭教育能夠連年驚豔全球的原因. 教育已然成爲芬蘭最成功的出口產品,是全球幼兒教育的一塊“樣板”.

如此看來,教育界中的幼兒教育學科也是處在“百花齊放,百家爭鳴” 的局面. 讓我共同努力,尋找符合中國國情的幼兒教育“課程” 和教育方法,爲中國孩子們的健康成長打下良好的基礎吧!

2014“希望杯”全國數學邀請賽（中學第二十五屆）
報名人數統計表

學校名稱	初一	初二	初三	高一	高二	合計	聯絡人
澳門大學附屬應用學校 *	4	4	4	0	0	12	曾慧樂
培華中學 *	4	15	9	10	26	64	劉冠靈
聖保祿學校 *	10	15	12	0	0	37	伍穎智
粵華中學 *	30	30	30	30	30	150	周駿業
菜農子弟學校 *	15	15	15	15	5	65	陳容貴
氹仔坊眾學校（中學部）*	10	10	10	0	10	40	馮影華
鏡平學校 *	50	50	50	40	40	230	劉志豪
培正中學 *	53	133	51	119	114	470	胡俊明
澳門坊眾學校 *	25	25	25	25	25	125	黃剛
陳瑞祺永援中學 *	19	11	5	8	0	43	黃慧珠
培道中學 *	40	40	45	40	35	200	徐寶思
聖公會（澳門）蔡高中學 *	14	20	18	13	11	76	徐文健
教業中學 *	15	10	15	10	15	65	吳伯成
濠江中學 *	60	60	60	60	60	300	李守球
同善堂中學 *	20	20	20	20	20	100	樑文亮
勞工子弟學校 *	60	60	60	60	60	300	文智和
高美士中葡中學 *	18	11	17	13	7	66	區兆添
浸信中學 *	30	30	30	30	30	150	蘇瑞庭
廣大中學 *	9	6	16	0	0	31	李錦健
中葡職業技術學校 *	10	0	10	11	2	33	黃嘉祺
新華學校 *	10	10	0	0	0	20	楊丹平
澳門演藝學院音樂學校	0	5	0	0	0	5	高凱
聖若瑟教區中學（第四校）	0	0	30	30	30	90	劉淑華
嶺南中學	0	0	5	4	3	12	鄭國強
聖玫瑰學校	0	0	3	0	0	3	陳志堃
合計	506	580	540	538	523	2687	

2014“希望杯”全國數學邀請賽（小學第十二屆）
報名人數統計表

學校名稱	小四	小五	小六	合計	聯絡人
化地瑪聖母女子學校	5	1	0	6	鄧順意
培道中學（小學部）	10	10	10	30	樑嬋娟
教業中學	20	20	30	70	鄭婉珊
菜農子弟學校	40	40	40	120	陳碧瑜
氹仔坊眾學校	8	8	8	24	岑麥妍
聖公會(澳門)蔡高中學	10	10	20	40	杜婉雯
鏡平學校（小學部）	40	40	40	120	劉志豪
培正中學（小學部）*	59	77	78	214	陳秋明
聖若瑟教區中學第五校	16	16	16	48	盛秀瑛
澳門坊眾學校（小學部）*	20	20	20	60	黃剛
陳瑞祺永援中學 *	15	15	0	30	黃慧珠
慈幼中學 *	12	12	12	36	樑艷華
濠江中學附屬小學 *	40	40	40	120	劉明藝
同善堂中學（小學部）	20	28	32	80	郭亞燕
勞工子弟學校（小學部）*	40	40	40	120	江敏育
澳門浸信中學（小學部）*	11	12	7	30	陳玉槐
澳門大學附屬應用學校 *	16	12	13	41	吳芬
澳門培華中學附屬小學	8	8	8	24	何蕙婷
聖玫瑰學校	2	0	0	2	陳志堃
合計	392	409	414	1215	

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門竹室正街1號富華樓2樓A室

電話:853－28965253,853－66878553 傳眞:853－28965253

E－mail: macaumath@ yahoo. com. hk, inwmacau@ yahoo. com. hk

Website: http://www. mathsmo. com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日	在氹仔海島公證署辦理本會注冊手續。

2003 年

6 月 7 日	舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會。
12 月 13、14 日	舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課。
12 月	《澳門數學教育》創刊號出版。

2004 年

4 月 17 日	舉辦“DM_Lab 和動態數學教學”講座。
9 月 30 日	赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學。
10 月 9、10 日	舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課。

2005 年

3 月 24 －28 日	赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。
4 月 16 日	與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會。
11 月 26、27 日	舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課。
12 月 20－28 日	前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

2006 年

3 月 4 日	舉辦“因材施敎、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會。

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課。

6 月 25 – 29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。

12 月 9 – 10 日　舉行“國家數學教育高級研修班’數學教師教育’澳門會議”。

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”。

7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學：一個國際視角”及“有效數學教學實務：美國的經驗”講座。

7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。

9 月 1 日　舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座。

2008 年

11 月 1 日　舉辦“小學數學專家講座”。

11 月 22 日　舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議。

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽（ARML），榮獲國際組第一名。

8 月 15 日 ~20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中。

11 月 14 日　舉辦“數學教學的有效性與開放性” 研討大會及示範課。

12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學” 評比大會。
（慶祝祖國成立 60 週年，澳門回歸 10 週年，本會成立 5 週年活動）

2010 年

6 月　成立“澳門數學奧林匹克學會”，政府憲報刊登該會章程。

11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。

1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。

9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”。

2012 年

6 月 9 日　　舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課。

8 月 1－6 日　　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。

11 月 3－4 日　　舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”。

11 月 3 日晚上　　舉行慶祝本會成立十週年晚宴,印製十週年成果展單張。

2013 年

4 月 6 日　　於慈幼中學舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽,共有 67 名學生參加。

4 月 14 日　　於浸信中學進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”全國數學邀請賽澳門地區第二試決賽。本澳共有 3874 名學生報名,其中中學 2645 人,小學 1229 人。

4 月 16 日　　名譽會長陳明金先生宴請本會幹事、參加 ARML 比賽之澳門隊成員、家人及校長們,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。

5 月 11 日　　於勞工子弟學校幼稚園舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”,邀請南京範大學虞永平教授主講“如何推動幼兒教育發展研究”和全國一級優秀幼稚園肇慶的盧晀園長進行幼兒課堂教學展示。

6 月 1 日　　濠江中學附屬小學袁浩軒和培正中學何俊毅應邀赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽,袁浩軒同學獲地區白金獎,何俊毅同學獲得優秀獎。

5 月 31、6 月 1 日　組織本澳 15 名數學優秀學生前往美國拉斯維加斯內華達大學拉斯維加斯校區(UNLV)參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊領隊、教練汪甄南、施振雄、梅致常,隊員包括(培正)鄧沛元、李東權、黎宗樺、周昊天、黎宗樺、(濠江)何廣華、袁永華、(勞校)胡文輝、陳豐毅、(鏡平)黃志聰、方偉權、馬俊傑、楊鉅安、(教業)蕭浩樑、(粵華英)李俊樂,比賽完畢後,參觀聖地牙哥航空母艦,遊覽了環球片場和 SANTA MONICA 等景點。這次中國隊獲國際組總分第一,澳門隊第二,新加坡隊第三,周昊天同學獲團體賽第二名,爲澳門學界爭光。

6 月 15－19 日　　於培道中學電子閱覽室舉辦數學實驗－－統計與概率工作坊。
道師:韋輝樑副會長和培道中學數學組張子隆和趙文遠老師。
主題:1. 亂數、排序、特徵資料和統計圖的數學實驗;
2. 回歸概念、線性回歸和正態回歸的數學實驗;
3. 概率、概率模型、古典概型和投擲模擬試驗;

4. 貝努利試驗和幾何分佈概型的摸擬試驗;

5. 摸球實驗和超幾何分佈概型的模擬試驗。

7 月 10 日　澳門基金會假萬豪軒酒家爲 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。

7 月 18 日　於濠江中學禮堂舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。澳門基金會黎振強委員、中聯辦文教部曲曉燕處長和教育暨青年局黃逸恆處長爲獲得者及其教練員頒發獎牌和證書。邀請法國的摩納哥王室少年合唱團表演助慶。

8 月 1 – 7 日　獲澳門中聯辦及黑龍江省教育廳安排,赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流,拜訪鷄西市教育局,參觀興凱和烏蘇裏江風景區。

11 月 16 – 17 日　於澳門大學何賢會議中心與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」,專題報告會專家:魯東大學教育科學院院長蘇春景教授、新加坡南洋理工大學蔡文亮先生、臺灣中華數學奥林匹克文教集總裁蔡坤龍先生、嘗試教學理論研究會理事長邱學華教授。

於澳門大學銀禧樓安排了六節小學數學觀摩課:

深圳南山鬆坪學校周莫涵,課題:小三《周長》,菜農學生參與;

重慶市人和街小學張識榮,課題:小六《圓的認識》,勞校學生參與;

新加坡學校張淑慧,課題:小五《比例》,培正學生參與;

北京陳經綸中學帝景分校張艷麗,課題:小五《烙餅問題》濠江學生參與;

臺灣小學張嘉容,課題:小五《因數與培數》,鏡平學生參與;

澳門培道中學樑嬋娟,課題:五《化難爲易找規律》,培道學生參與。

內地老師進行說課比賽:

北京芳草地國際學校張龍主講《語文“將相和”》;

北京陳經綸中學喜諾分校喬仁鳳主講《電功率》;

重慶珊瑚小學劉波主講《認識時間》;

四川宜賓人 路小學何富張主講《百分數的意義》;

常州湖塘實驗中學徐紅兵主講《平面直角坐標係》;

重慶馬家堡小學湯靜主講《分數的意義》;

廣州梅園西路小學何藝燕主講《認識時間》;

珠海市香州一張宏池主講《三角形特徵》;

重慶珊瑚小學劉波主講《兩位數加兩位數》;

重慶珊瑚小學王麗嘉主講《長、正方形》。

評委:方運加教授(首都師範大學數學係)、邱學華教授(嘗試教學理論研究會理事長)、黃建弘(上海師資培訓中心實驗基地主任)、江春蓮

	教授（澳門大學教育學院）、蔡兆明（澳門數學教育研究學副理事長）。
	幼兒教育報告會：
	臺灣中華數學協會理事長蔡坤龍先生介紹了他們研發的開發孩童智力的系列數學教具和教材，參與聽眾現場體驗因應孩童發展的自學課程。
12 月 7－9 日	於澳門浸信中學舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級證書培訓班」，由華東師範大學國際奧林匹克研究中心熊斌教授和劉鴻坤教授主講。
12 月	《澳門數學教育》第十一期出版。