

## 目 錄

社 長：汪甄南  
主 編：汪甄南  
副主編：伍助志 李寶田  
鄭志民  
編 委：吳珮玲 劉淑華  
蔡九錫 蔡兆明  
董淑珍 胡漢賢  
劉明藝 林松孝  
梅致常 鄧海棠  
石 瑋 金 鑫  
(排名不分先後)

 澳門教育暨青年局 贊助  
 澳 門 基 金 會

澳門數學教育研究學會出版  
澳門新聞局編號:2877  
地址:澳門南灣街 107 號  
刊頭題詞:張奠宙教授  
排版:廣源紙業文具行  
印刷:文寶印務有限公司  
刊號:ISSN 1814 - 2176

|                                        |     |    |
|----------------------------------------|-----|----|
| 澳門小學新思維數學教材第二版解讀 .....                 | 汪甄南 | 1  |
| 一道極限概念題 .....                          | 李祥立 | 12 |
| 用積分和矩陣方程求正整數之方冪和 .....                 | 李祥立 | 14 |
| “用代點法求軌跡方程”之典型範例分析 .....               | 鄭志民 | 21 |
| 小議劉欣儒老師公開課《年、月、日》 .....                | 鄧海棠 | 36 |
| 圖形的全等 .....                            | 張 迎 | 41 |
| 圖形中陰影面積的幾種求法 .....                     | 宋 陽 | 46 |
| 2015“希望杯”全國數學邀請賽(中學第二十六屆)報名人數統計表 ..... |     | 54 |
| 2015“希望杯”全國數學邀請賽(小學第十三屆)報名人數統計表 .....  |     | 55 |
| 會務活動紀錄 .....                           |     | 56 |



# 澳門小學新思維數學教材第二版解讀

澳門數學教育研究學會 汪甄南

2014 ~ 9 ~ 12 澳門日報刊登了一篇報導,題為“教師應活用教材非硬性灌輸教青局所指出的:「開發具本澳特點的教材」”,其內容摘要為:“有意見關注‘課框’的教科書評審工作,教青局教育研究暨資源廳長黃健武稱,落實課程改革著力提昇教師教材設計與開發能力,讓教學者活用教材而非依書直說.並讓教師清晰理解‘基本學力’理念,作為引道教材編寫和選用的依據,”……“俗稱‘課框’的「正規教育課程框架」,本學年起正式生效,將按各教育階段有序落實課程改革,實施過程中,有意見認為有必要訂定和提供教材以協助教師教學,開發切合改革內容的教科書.”“黃健武還指出‘基本學力’是各教育階段學習領域或科目課程的基準,可作為引道教材編寫和選用的依據.”

下圖扼要地展示了本澳小學數學“基本學力要求”的能力培養與教學內容範疇.



新思維數學教材,在第一版基礎上,更全面地體現了“基本學力要求”,從內容安排上、能力訓練要求上,基本與上圖所示的教學內容和能力要求是一致的.

澳門的小學生,在數學科學習中普遍存在“**驚數**”的現象,具體反映在對數的概念的理解和運算能力較差,因此,“學力要求”在加法、減法、乘法、除法等教學方面特別對口算教

學提出了一定的要求,並能期望通過各級不同要求的口算訓練教學,來提昇學生的運算能力.第二版教材不但落實口算教學要求,而且還要求配合學生餘暇活動進行“史豐收速算法”的學習與訓練,這就為低年班小朋友在四則運算方面打下了扎實的基礎.

“基本學力要求”強調在兒童學習數學的過程中,應體現“**低起點、小步子、多活動、多反饋**”的教學策略,這一策略更能貼近澳門兒童在數學學習方面的知識實際和生活實際,能更有效地提昇兒童的數學素養.

● 第二版新思維教材充分考慮這一特點,把知識點的安排緊密地與這一特點相結合,如對加法的教學,我們把一位、兩位以及多位的加法,無論不進位或進位都充分考慮,以“**小步子**”的模式,降低兒童學數的難度.

● 又如在“**速率**”教學的安排上也充分考慮這一教學策略.

在小數加法內容編排上,從元、角分別相加開始代之以小數形式相加,使小朋友一開始就能接及接受小數形式的加法運算(如下圖).

活動目的：認識小數加法的計算（不涉及進位）.

1 購買上面兩盒飲品共需付多少元？看看子安和樂兒怎樣計算.



我把3.4元寫成3元4角，4.5元寫成4元5角，然後這樣計算.

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| 3     | 元 | 4 | 角 |   |
| +     | 4 | 元 | 5 | 角 |
| <hr/> |   |   |   |   |
| 7     | 元 | 9 | 角 |   |
| 即7.9元 |   |   |   |   |



我用小數直式計算.

|       |     |
|-------|-----|
| 3.4   |     |
| +     | 4.5 |
| <hr/> |     |
| 7.9   |     |

0.4 + 0.5 = 0.9  
3 + 4 = 7

你喜歡哪個方法？說一說.



然後通過四種不同題型(如下圖),給小朋友指出了在小數加法運算中最易出錯的問題,如  
(a) 在滿10進1的前題下,小數點後數位的讀法,即十分位、百分位...;學生很容易讀錯;學生往往會念成整數位;

(b) 關於補零的問題,在整數與小數相加時,為了對位準確,在整數後面加上小數點和零;

(c) 關於舍去零的問題,一定要突出“小數點後末端的零可以刪去”;應使小朋友明確:“末端”兩字的概念;

(d) 關於運算結果處理問題,“如果小數後沒有數字了,這樣運算結果的表達,可以把小數點也刪去”.



教材對小數加法的編寫,充分體現了“小步快走”的編寫理念。

3

計算下面各題。

(a)  $2.56 + 1.79 = \underline{\quad 4.35 \quad}$

$$\begin{array}{r} 2.56 \\ + 1.79 \\ \hline 4.35 \end{array}$$

百分位滿10進1到十分位，十分位滿10進1到個位。

(b)  $23 + 8.4 = \underline{\quad 31.4 \quad}$

$$\begin{array}{r} 23.0 \\ + 8.4 \\ \hline 31.4 \end{array}$$

補上小數點及「0」。

(c)  $5.16 + 2.34 = \underline{\quad 7.5 \quad}$

$$\begin{array}{r} 5.16 \\ + 2.34 \\ \hline 7.50 \end{array}$$

答案的小數點後末端的「0」可以刪去。

(d)  $2.41 + 0.64 + 1.95 = \underline{\quad 5 \quad}$

$$\begin{array}{r} 2.41 \\ 0.64 \\ + 1.95 \\ \hline 5.00 \end{array}$$

如果小數點後再沒有數字，把小數點也刪去。

對思維教學策略的探究：

有一位哲學家曾經說過，“什麼都能代替，唯有思維不能代替”。

數學教學主要是思維活動教學，要求學生主動參與，讓學生自由思考，鼓勵學生質疑問難，培養學生創新精神。

數學是抽象的科學，符號的科學，特別在小學數學教學中，我們的數學老師應盡量做到：“抽象內容形象化，枯燥知識趣味化”。

數學思維能力在兒童學習數學過程中，具有特別重要意義，沒有數學思維就沒有真正的數學學習；

小學數學的學習，並不是單純的記憶、模仿，而是包括學生自主探索、合作交流和實踐創新的多種形式；

“基本學力要求”特別強調培養學生的數學思維能力。

思維能力培養的幾個案例（關於邏輯思維能力、推理能力的培養）：

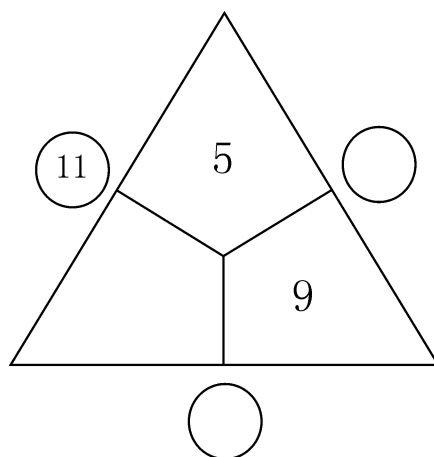
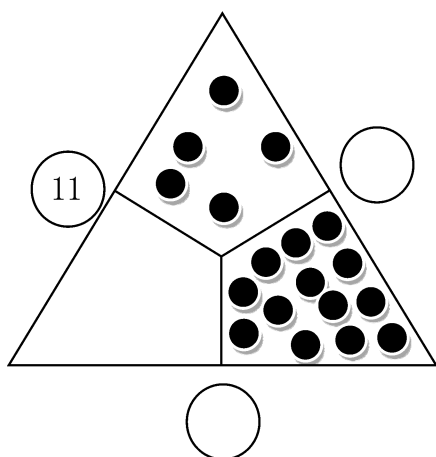
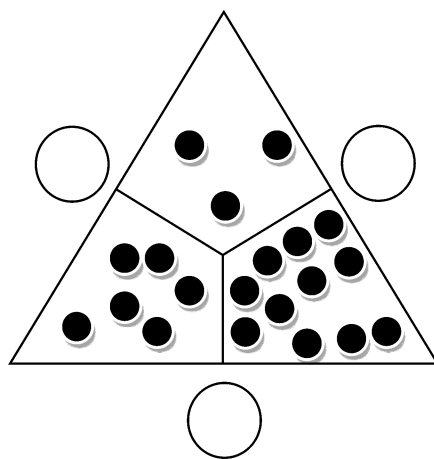
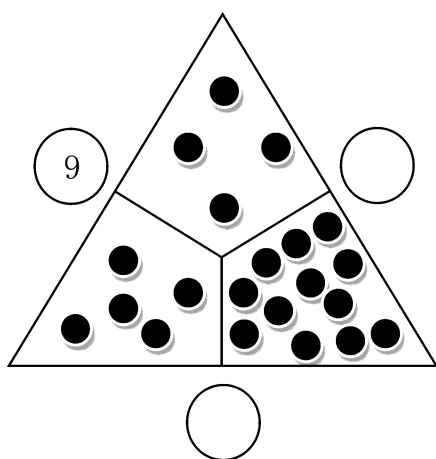
（一）填圓片遊戲

通過本案例的教學，重點培養學生的邏輯思維能力讓學生自主地發現規律，通過遊戲嘗試求解。

如何設計符合兒童認知規律，讓一年班小朋友體現“小步快走”的教學理念，也讓他們從遊戲中領略到未知數解方程的初步模型。

玩這一遊戲也使小朋友經歷了把圓片轉換為數的過程。其思維活動的難易程度，可隨著圖形要求的不同而逐漸增加；

根據圖例，在空白的圖形內填數。其難易程度可根據教學要求加以調整，圓片和數字也可以互相更換。

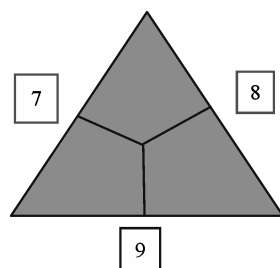


下圖的填數對小學生來說會有一定難度，因為玩這一遊戲，就是在解三元一次聯立方程組。

如設三角形內三塊空白位置所需填的數為  $x, y, z$ ，則其聯立方

程組的形式為：

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ y + z = 8, \\ z + x = 9. \end{cases}$$



這一案例，主要是讓學生自主地發現規律，通過嘗試求得解，整個設計符合兒童認知規律，也體現了“小步快走”教學的理念。

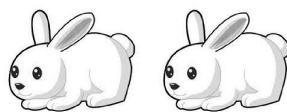
其次一年級下學期的學生，即可從遊戲中領略到未知數解方程的初步題型，在這裏，學生經歷了圖片轉換為數的過程。

## （二）雞兔同籠問題

通過本案例的教學，培養學生“窮舉思維”（枚舉思維）能力。

雞兔同籠問題,是中國古代著名的算題,因其答案不唯一,而較難被二年級學生所接受,但如果我們啓發學生運用畫圖、列表的方法,可找到部分的解,然後逐步找到全部的解.而且對題目的思考過程,可以讓學生逐步形成“窮舉法”的思維方式.

〔例〕兔和雞共有 22 只腳,有可能是幾只兔和幾只雞?



3 隻兔和 5 隻雞

2 隻兔和 7 隻雞

我們可以用列表的方法來找出結果.

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 雞數    | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 雞腳數   | 0  | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
| 剩下的腳數 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8  | 6  | 4  | 2  | 0  |
| 兔數    |    | 5  |    | 4  |    | 3  |    | 2  |    | 1  |    | 0  |

|       |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| 兔數    | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 兔腳數   | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 |
| 剩下的腳數 | 22 | 18 | 14 | 10 | 6  | 2  |
| 雞數    | 11 | 9  | 7  | 5  | 3  | 1  |

比較一下哪種方法容易?

答: 可能是 1 只兔和 9 隻雞,也有可能是 2 只兔和 7 隻雞 ……



### “擲骰子”遊戲

發散思維的啓示

(三) 通過“擲骰子”遊戲實驗,改變兒童思維方向. 在用兩粒骰子一起擲的遊戲實驗過程中,小朋友會發現,擲的次數越多,各種點數和的出現次數,會有一定的規律. 如:

“用兩粒骰子來擲,用圖表記錄,哪些點數和在你面前經常出現?哪些點數和在你面前較少出現?”

認識骰子圖,並填寫點數:哪些擲出的數的和為 7?

| 數點圖                                                                               | 點數 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
|  |    |
|  |    |
|  |    |
|  |    |
|  |    |
|  |    |

| 點數和 | 出現次數    |
|-----|---------|
| 2   |         |
| 3   |         |
| 4   |         |
| 5   |         |
| 6   |         |
| 7   | 正一(即6次) |
| 8   |         |
| 9   |         |
| 10  |         |
| 11  |         |
| 12  |         |

在下面的加法表中,將兩粒骰子的點數和都算出,並填在相應的位置內,然後問小朋友“從表中你發現了什麼?”

| +                                                                                   |  |  |  |  |  |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |
|  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |
|  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |
|  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |
|  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |
|  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |

#### (四) 關於三角形面積

在小學數學圖形面積計算教學中,三角形面積計算,是基本的面積計算. 但是如何通過三角形圖形的不斷變化,能牢固地掌握三角形面積計算公式的應用,就並非容易了. 下例通過不斷改變三角形圖形的位置,培養學生不同的思維方向,來正確計算三角形面積.

在下圖中,四邊形  $ABCF$  和  $CDEG$  都是正方形(圖1),它們的邊長分別是  $8cm$  和  $6cm$ ,在點  $A, B, C, D, E, F, G$  中,過其中任意兩點都可連成一線段,在這些線段中,除上面兩個正方形的邊外,還有一些與正方形的邊不重合的頂點連線(如圖2 虛線所示),如  $AE, AD$ ,

$BE\cdots\cdots$  等(圖 2), 這些線我們稱它為輔助線, 適當地取兩條輔助線和兩正方形中任意一邊, 就可以構造成一個三角形, 然後再逐一計算出這些三角形的面積:

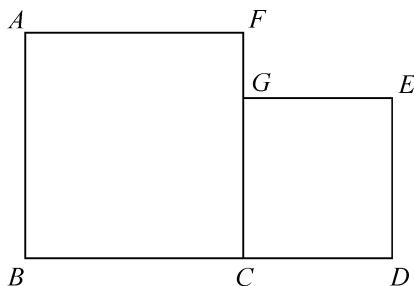


圖 1

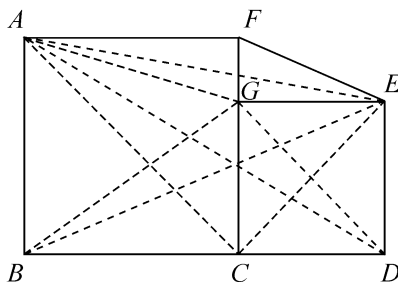


圖 2

(1) 過  $A$  點作輔助線.

用過  $A$  點的兩條輔助線和正方形的一條邊可以構成以下三角形(圖 4 - 圖 7 中的陰影部分):

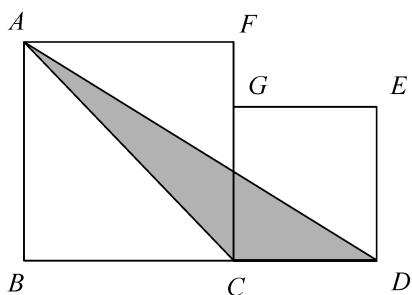


圖 4

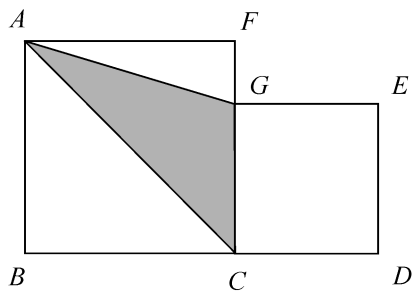


圖 5

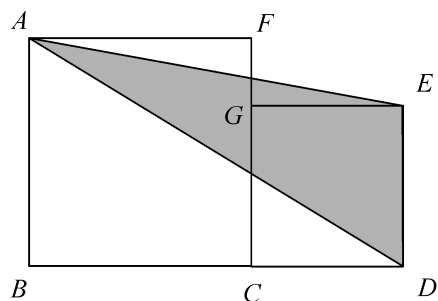


圖 6

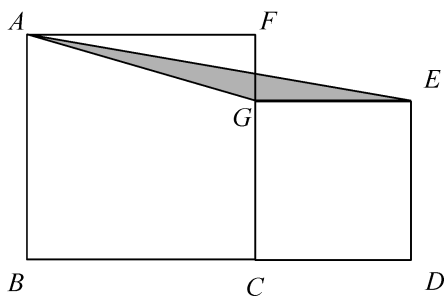


圖 7

(2) 過  $B$  點作輔助線.

用過  $B$  點的兩條輔助線和正方形的一條邊可以構成以下一種三角形(圖 8 中的陰影部分).

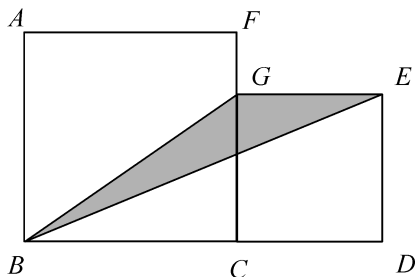


圖 8

(3) 過  $C$  點的輔助線.

用過  $C$  點的兩條輔助線無法與正方形的一條邊構成三角形.

(4) 過  $D$  點的輔助線.

用過  $D$  點的兩條輔助線與正方形的一條邊可構成(圖 9 中的陰影部分) 所示的三角形.

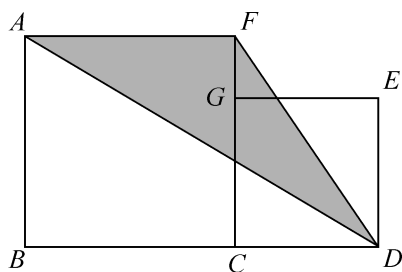


圖 9

(5) 過  $E$  點的輔助線.

用過  $E$  點的兩條輔助線和正方形的一條邊可以構成下面四種三角形,(圖 10 - 圖 13 中的陰影部分).

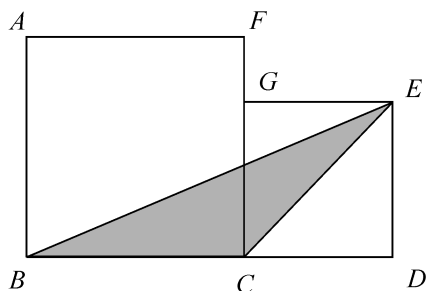


圖 10

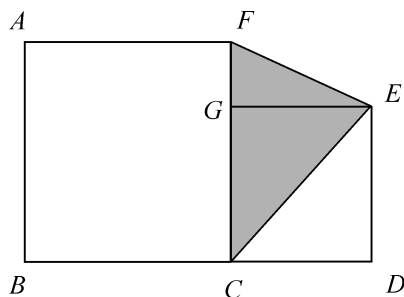


圖 11

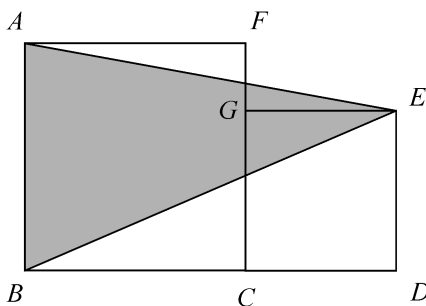


圖 12

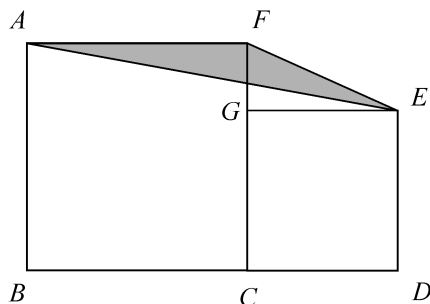


圖 13

(6) 過  $F$  點的輔線.

用過  $F$  點的兩條輔線和正方形的一條邊可以構成一個三角形,(圖 14 中的陰影部分).

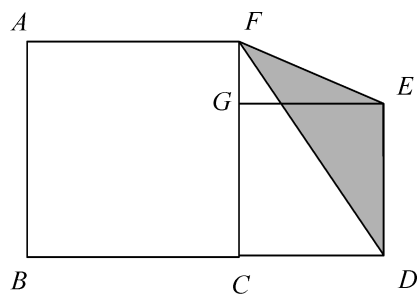


圖 14

(7) 過  $G$  點的輔助線.

用過  $G$  點的兩條輔線和正方形的一條邊可以構成(圖 15 中的陰影部分) 所示的三角形.

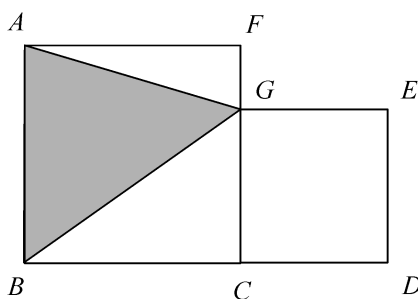


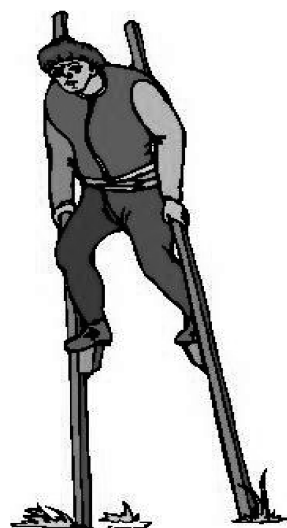
圖 15

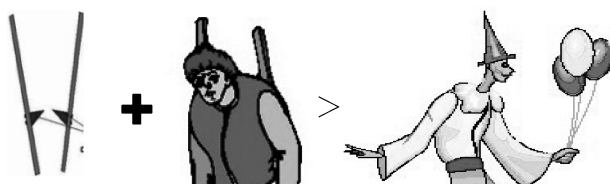
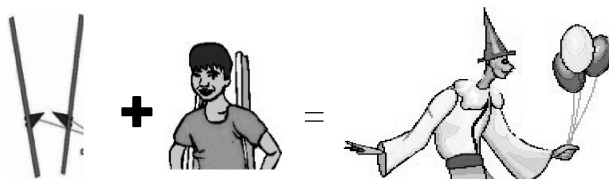
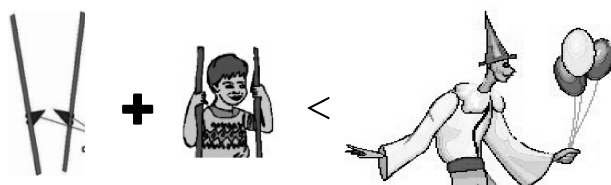
(五) 一年級的小學生也可通過嘗試實驗，來解一元一次不等式.

1. 踩高蹺, 與

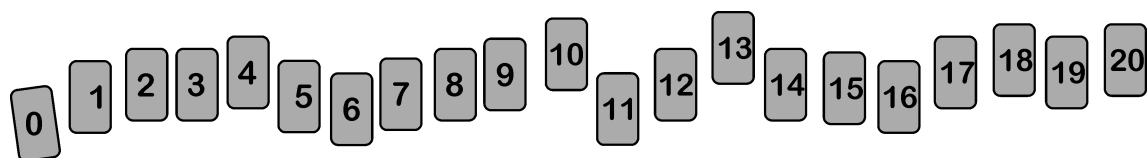


比高低.





## 2. 最大填幾？



$$7 + \underline{5} < 13;$$

$$9 + \underline{\quad} < 17;$$

$$6 + \underline{\quad} < 14;$$

$$16 - \underline{\quad} > 8;$$

$$11 - \underline{\quad} > 7;$$

$$13 - \underline{\quad} > 6.$$

在填數遊戲中，符合不等式要求的，可以填一個數，也可以填幾個數，培養學生思維的靈活性。相對於低年級小朋友，我們可以用“小步走”的方法，從低要求開始，然後讓小朋友自主探究，去擴展自己的思維能力。

## （六）靈活應用教材優勢，改變教學理念，改善學習方式

通過對教材系統研究，在理解教材編者意圖的情況下，適當地改變具體的教學模式和教學方法，這對提高教學效果會取得更理想的成效。



據國內魯東大學教育科學院蘇春景院長的研究,改革開放以來全國出現了 130 多種教學方法,其中有影響的約有 18 種。

從教學改革中的趨同現象來看,下面概括了四種在全國影響較大、效果較好的教學方法及其主要特點的是:

1. 嘗試教學法: 先練後講 練在當堂;
2. 洋思經驗: 先學後教 當堂訓練;
3. 杜郎口經驗: 預習展示 反饋達標;
4. 青浦經驗: 嘗試指道 反饋矯正。

第二版新思維教材有利於學生學會學習,在體系方面也進一步做好編排工作;例如

- 重視數學知識的邏輯順序和心理發展順序之間的關係;
- 兒童思維特點是由形象思維逐步向抽象思維過渡,要使抽象的數學知識能被小朋友所理解,就不可能完全按照科學的邏輯順序來編排教材;
- 對小學數學知識的內部結構進行了革新和嘗試,對內容、結構、次序、知識點等等方面進行了調整或重新整合。

教材特別重視分散教學難點,如關於“速率”方面的知識,“學力要求”在三年級時就安排了學習“認識速率、路程和時間的關係”,從兒童的生活實際出發,教材在不增加難度的前提之下,只要求兒童認識速率、路程和時間的基本關係,為以後學習難度較大的“速率”問題奠定基礎。

澳門“小學數學基本學力要求”和“如何落實數學思維能力的培養”是這次“新思維數學教材”重新編寫的重要指引,其“科學性”、“思維性”、“可讀性”、“可教性”以及“趣味性”也是新思維數學教材第二版的重要特色。

# 一道極限概念題

李祥立

回顧一元函數極限之定義：設  $a, b$  為實數， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$  對每一實數  $\varepsilon > 0$ ，必至少有一實數  $\delta > 0$ ，使當  $0 < |x - a| < \delta$  時， $|f(x) - b| < \varepsilon$  [即當  $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$  時， $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ ].

由上述定義知：若  $c$  為實數且  $c \neq 0$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x}$  不存在，即無實數  $b$  存在，使  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} = b$ . 此因我們可使  $\left| \frac{c}{x} \right|$  之值大至任何程度，只要我們令  $x$  接近 0 至某一程度時. 嚴格來說，即對任一正實數  $K$ ，無論  $K$  有多大，總可找到一個  $x$  的適當範圍  $(0 - \delta, 0) \cup (0, 0 + \delta)$ ，使  $\left| \frac{c}{x} \right| > K$ ，例如，取  $\delta = \frac{|c|}{K}$  即可 (因)  $\left| \frac{c}{x} \right| > K \Leftrightarrow \frac{|c|}{|x|} > K \Leftrightarrow |x| < \frac{|c|}{K}$ . 如此一來，要找一個  $x$  的範圍  $(0 - \delta, 0) \cup (0, 0 + \delta)$ ，使  $\frac{c}{x}$  落入一個形如  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  之範圍是絕不可能的，不管  $b$  與  $\varepsilon$  是任何實數.

今年 (2014) 臺灣大專院校聯合入學試 (澳門區) 數學科有一道題如下：

已知  $f(x)$  為三次多項式且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$ ，則方程  $f(x) = 0$  的三根之和為何？

- (A)  $\frac{3}{2}$       (B)  $\frac{5}{3}$       (C)  $\frac{7}{5}$       (D)  $\frac{9}{7}$       (E)  $\frac{14}{9}$

筆者擬解法於下：

設  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，則

$$\frac{f(x)}{x} - ax^2 - bx - c = \frac{d}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)}{x} - ax^2 - bx - c \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{x},$$

$$\text{但 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)}{x} - ax^2 - bx - c \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c) = 2 - c,$$

$$\text{得 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{x} = 2 - c.$$

若  $d \neq 0$ , 由前述討論知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{x}$  不可能存在, 與上式相互矛盾, 故  $d = 0$ .

由此得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ , 故  $2 - c = 0$ , 得  $c = 2$ .

於是,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x$ .

又設  $f(x) = a(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$ , 用待定係數法或其他方法, 得  $B = 2a + b$ ,  $C = 3a + 2b + 2$ ,  $D = a + b + 2$ ,

故  $\frac{f(x)}{x-1} = a(x-1)^2 + (3a+b)(x-1) + (3a+2b+2) + \frac{a+b+2}{x-1}$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+b+2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{f(x)}{x-1} - a(x-1)^2 - (3a+b)(x-1) - (3a+2b+2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} [a(x-1)^2 + (3a+b)(x-1) + (3a+2b+2)] \\ &= 1 - (3a+2b+2)\end{aligned}$$

同理, 若  $a+b+2 \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+b+2}{x-1}$  不可能存在, 與上式相互矛盾, 故  $a+b+2 = 0$ .

由此得  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+b+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 0 = 0$ , 故  $1 - (3a+2b+2) = 0$ .

解聯立方程  $1 - (3a+2b+2) = 0$  和  $a+b+2 = 0$ , 得  $a = 3, b = -5$ .

方程  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  之三根和為  $-\frac{b}{a}$ , 即  $\frac{5}{3}$ .

故正確答案應選(B).

[ 注 ] 李祥立 —— 澳門培正中學前任校長.

# 用積分和矩陣方程求正整數之方冪和

李祥立

正整數之方冪和  $\sum_{k=1}^n k^m$  之求法有多種,其一是利用數列  $a_k = k(k+1)(k+2)\cdots(k+p)$ , 其中  $k, p$  為正整數,則  $a_k - a_{k-1} = k(k+1)(k+2)\cdots(k+p) - (k-1)k(k+1)\cdots(k-1+p)$   
$$= (p+1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1).$$

取  $k$  之值為  $1, 2, 3, \dots, n$  分別代入,然後將全部等式相加,左邊恰好是每一式之前項與下一式的後項對消,僅剩下第一式的後項,即  $a_0 (= 0)$ ,與最後一式的前項,即  $a_n$ ,亦即  $n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$ ,全部等式右邊的和則為  $(p+1) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)$ ,於是得公式  $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{p+1}$ . [以  $p=1$  代入

即得  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ,又  $p=2$  時得  $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ,餘類推.]

上述公式很好用,例如,要求自然數的平方和,可設  $k^2 = k(k+1) + ak + b$ ,用待定係數法求得  $a, b$  之值,兩邊取  $\sum$  即可得;又如,欲求自然數的立方和,可設  $k^3 = k(k+1)(k+2) + ak(k+1) + bk + c$ ,用待定係數法求得  $a, b, c$  之值,兩邊取  $\sum$  即可得,餘類推.

求  $\sum_{k=1}^n k^m$  之另一方法是用差分法,讀者可參閱有關書籍,或筆者所著之《中學數學教學研究》(澳門中華教育會澳門教育叢書,中國社會科學出版社 2014 年版)第二十章.

至於推道通式,則上述二法都不適用. 我們試用積分和矩陣方法如下:

設  $S_m = \sum_{k=1}^n k^m = 1^m + 2^m + \cdots + n^m (m = 0, 1, 2, \dots)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} &= \int_0^{n+1} x^m dx \\ &= \int_0^1 x^m dx + \int_1^2 x^m dx + \cdots + \int_n^{n+1} x^m dx \\ &= \int_0^1 x^m dx + \int_0^1 (x+1)^m dx + \cdots + \int_0^1 (x+n)^m dx \\ &= \int_0^1 [x^m + (x+1)^m + (x+2)^m + \cdots + (x+n)^m] dx \end{aligned}$$

但  $x^m + (x+1)^m + (x+2)^m + \cdots + (x+n)^m$

$$\begin{aligned}
&= (n+1)x^m + (C_1^m + 2C_1^m + \cdots + nC_1^m)x^{m-1} + (C_2^m + 2^2C_2^m + \cdots + n^2C_2^m)x^{m-2} + \cdots + (C_m^m \\
&\quad + 2^mC_m^m + \cdots + n^mC_m^m) \\
&= (n+1)x^m + (1+2+\cdots+n)C_1^mx^{m-1} + (1^2+2^2+\cdots+n^2)C_2^m + \cdots + (1^m+2^m+\cdots \\
&\quad + n^m)C_m^m \\
&= (n+1)x^m + S_1C_1^mx^{m-1} + S_2C_2^mx^{m-2} + \cdots + S_mC_m^m, \\
\text{故 } \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} &= \int_0^1 [(n+1)x^m + S_1C_1^mx^{m-1} + S_2C_2^mx^{m-2} + \cdots + S_mC_m^m] dx \\
&= \frac{n+1}{m+1} + \frac{S_1C_1^m}{m} + \frac{S_2C_2^m}{m-1} + \cdots + \frac{S_mC_m^m}{1}. \quad 3
\end{aligned}$$

分別以  $m = 0, 1, 2, \dots, 6$  代入上式,

$$m = 0 \Rightarrow n+1 = \frac{n+1}{1},$$

$$\begin{aligned}
m = 1 \Rightarrow \frac{(n+1)^2}{2} &= \frac{n+1}{2} + \frac{S_1C_1^1}{1} \\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{S_1}{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 2 \Rightarrow \frac{(n+1)^3}{3} &= \frac{n+1}{3} + \frac{S_1C_1^2}{2} + \frac{S_2C_2^2}{1} \\
&= \frac{n+1}{3} + \frac{2S_1}{2} + \frac{S_2}{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 3 \Rightarrow \frac{(n+1)^4}{4} &= \frac{n+1}{4} + \frac{S_1C_1^3}{3} + \frac{S_2C_2^3}{2} + \frac{S_3C_3^3}{1} \\
&= \frac{n+1}{4} + \frac{3S_1}{3} + \frac{3S_2}{2} + \frac{S_3}{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 4 \Rightarrow \frac{(n+1)^5}{5} &= \frac{n+1}{5} + \frac{S_1C_1^4}{4} + \frac{S_2C_2^4}{3} + \frac{S_3C_3^4}{2} + \frac{S_4C_4^4}{1} \\
&= \frac{n+1}{5} + \frac{4S_1}{4} + \frac{6S_2}{3} + \frac{4S_3}{2} + \frac{S_4}{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 5 \Rightarrow \frac{(n+1)^6}{6} &= \frac{n+1}{6} + \frac{S_1C_1^5}{5} + \frac{S_2C_2^5}{4} + \frac{S_3C_3^5}{3} + \frac{S_4C_4^5}{2} + \frac{S_5C_5^5}{1} \\
&= \frac{n+1}{6} + \frac{5S_1}{5} + \frac{10S_2}{4} + \frac{10S_3}{3} + \frac{5S_4}{2} + \frac{S_5}{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = 6 \Rightarrow \frac{(n+1)^7}{7} &= \frac{n+1}{7} + \frac{S_1C_1^6}{6} + \frac{S_2C_2^6}{5} + \frac{S_3C_3^6}{4} + \frac{S_4C_4^6}{3} + \frac{S_5C_5^6}{2} + \frac{S_6C_6^6}{1} \\
&= \frac{n+1}{7} + \frac{6S_1}{6} + \frac{15S_2}{5} + \frac{20S_3}{4} + \frac{15S_4}{3} + \frac{6S_5}{2} + \frac{S_6}{1},
\end{aligned}$$

$$\text{故} \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{4} & \frac{6}{3} & \frac{4}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{5} & \frac{10}{4} & \frac{10}{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{6} & \frac{15}{5} & \frac{20}{4} & \frac{15}{3} & \frac{6}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+1 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ \frac{1}{2}(n+1)^2 \\ \frac{1}{3}(n+1)^3 \\ \frac{1}{4}(n+1)^4 \\ \frac{1}{5}(n+1)^5 \\ \frac{1}{6}(n+1)^6 \\ \frac{1}{7}(n+1)^7 \end{pmatrix}.$$

(留意:左側方陣之每一列的分子剛好是楊輝三角之數,分母則是由1至 $m+1$ 各整數之逆序,容易推廣)

$$\text{設 } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{4} & \frac{6}{3} & \frac{4}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{5} & \frac{10}{4} & \frac{10}{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{6} & \frac{15}{5} & \frac{20}{4} & \frac{15}{3} & \frac{6}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} n+1 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} n+1 \\ \frac{1}{2}(n+1)^2 \\ \frac{1}{3}(n+1)^3 \\ \frac{1}{4}(n+1)^4 \\ \frac{1}{5}(n+1)^5 \\ \frac{1}{6}(n+1)^6 \\ \frac{1}{7}(n+1)^7 \end{pmatrix},$$

則原矩陣方程即 $AX = C$ ,若 $A^{-1}$ 存在,則 $A^{-1}(AX) = A^{-1}C$ ,即 $(A^{-1}A)X = A^{-1}C$ ,即 $IX = A^{-1}C$ ,其中 $I$ 為與 $A$ 同階之單位方陣,即 $X = A^{-1}C$ 為原矩陣方程之解. 對上例之 $A$ ,因 $|A| = 1$ ,故 $A^{-1}$ 確實存在.

當方陣 $A$ 為可逆時(即 $A^{-1}$ 存在),方程 $AX = I$ 有解,其中 $I$ 為與 $A$ 同階之單位方陣,解法為 $A^{-1}(AX) = A^{-1}I$ ,得 $(A^{-1}A)X = A^{-1}$ ,即 $IX = A^{-1}$ ,換言之,當方陣 $A$ 經基本列運算後,變成方陣 $I$ 時,方陣 $I$ 經同樣的基本列運算後,自可變成 $A^{-1}$ ,圖示於下:

$$\begin{array}{ccc} AX & = & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ IX & = & A^{-1} \end{array}$$

將方陣  $A$  與  $I$  並列(如下圖所示),並施以基本列運算(以  $R_i$  表其第  $i$  列),目的是要將  $A$  變成  $I$ ,則施以同樣的列運算, $I$  將會變成  $A^{-1}$ ,過程如下:

| $A$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $I$                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{4} & \frac{6}{3} & \frac{4}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{5} & \frac{10}{4} & \frac{10}{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{6} & \frac{15}{5} & \frac{20}{4} & \frac{15}{3} & \frac{6}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} \end{pmatrix}$ |

經基本列運算  $-\frac{1}{2}R_1 + R_2, -\frac{1}{3}R_1 + R_3, -R_2 + R_3, -\frac{1}{4}R_1 + R_4, -R_2 + R_4, -\frac{3}{2}R_3 + R_4, -\frac{1}{5}R_1 + R_5, -R_2 + R_5, -2R_3 + R_5, -2R_4 + R_5, -\frac{1}{6}R_1 + R_6, -R_2 + R_6, -\frac{5}{2}R_3 + R_6, -\frac{10}{3}R_4 + R_6, -\frac{5}{2}R_5 + R_6, -\frac{1}{7}R_1 + R_7, -R_2 + R_7, -3R_3 + R_7, -5R_4 + R_7, -5R_5 + R_7, -3R_6 + R_7$  後,得

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & -3 & \frac{1}{1} \end{pmatrix}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$$\text{於是, } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & -3 & \frac{1}{1} \end{pmatrix},$$

故原矩陣方程之解爲  $X = A^{-1}C$ , 即

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & -3 & \frac{1}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+1 \\ \frac{1}{2}(n+1)^2 \\ \frac{1}{3}(n+1)^3 \\ \frac{1}{4}(n+1)^4 \\ \frac{1}{5}(n+1)^5 \\ \frac{1}{6}(n+1)^6 \\ \frac{1}{7}(n+1)^7 \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } S_1 = -\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{6}(n+1) - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^4 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\begin{aligned} S_4 &= -\frac{1}{30}(n+1) + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{5}(n+1)^5 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}, \end{aligned}$$

$$S_5 = -\frac{1}{12}(n+1)^2 + \frac{5}{12}(n+1)^4 - \frac{1}{2}(n+1)^5 + \frac{1}{6}(n+1)^6$$



$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$S_6 = \frac{1}{42}(n+1)^2 - \frac{1}{6}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^5 - \frac{1}{2}(n+1)^6 + \frac{1}{7}(n+1)^7$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}.$$

留意:當  $n = 0$  時,  $S_1 = S_2 = S_3 = \cdots = S_6 = 0$ , 可推知  $S_m = 0 (m \geq 1)$ . 此一事實亦可從原矩陣方程  $AX = C$  以  $n = 0$  代入推道得出.

設  $b_{m,j}$  表  $A^{-1}$  中第  $m+1$  列, 第  $j$  行之元素, 由  $X = A^{-1}C$ , 得關係  $S_m = \sum_{j=1}^{m+1} b_{m,j} \frac{(n+1)^j}{j}$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ), 並推斷得通式  $S_m = \sum_{j=1}^{m+1} b_{m,j} \frac{(n+1)^j}{j}$ , 但此通式不好用.

又觀察  $A^{-1}$  之各項關係: 知  $\frac{b_{m-1,j-1}}{j-1} = \frac{b_{m,j}}{m}$  (例如  $\frac{b_{2,1}}{1} = \frac{b_3,2}{3}, \frac{b_{4,1}}{1} = \frac{b_{5,2}}{5}, \frac{b_{5,2}}{2} = \frac{b_{6,3}}{6}$  等), 得

$$b_{m,j} = \frac{m}{j-1} b_{m-1,j-1} = \frac{m}{j-1} \cdot \frac{m-1}{j-2} b_{m-2,j-2} \frac{m}{j-1} \cdot \frac{m-1}{j-2} \cdot \frac{m-2}{j-3} b_{m-3,j-3} = \cdots$$

$$= \frac{m}{j-1} \cdot \frac{m-1}{j-2} \cdot \frac{m-2}{j-3} \cdots \frac{m-(j-2)}{j-(j-1)} b_{m-(j-1),j-(j-1)}$$

$$= \frac{m}{j-1} \cdot \frac{m-1}{j-2} \cdot \frac{m-2}{j-3} \cdots \frac{m-(j-2)}{1} b_{m+1-j,1} = C_{j-1}^m b_{m+1-j,j}, \text{ 因此}$$

$$S_m = \sum_{j=1}^{m+1} b_{m,j} \frac{(n+1)^j}{j} = \sum_{j=1}^{m+1} C_j^{m+1} b_{m+1-j,1} \frac{(n+1)^j}{j} = \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} C_j^{m+1} b_{m+1-j,1} (n+1)^j \text{ (此因)}$$

$$C_j^{m+1} = \frac{m+1}{j} C_j^m - 1).$$

$$\text{設 } B_i = b_{i,1}, \text{ 則 } S_m = \sum_{j=1}^{m+1} C_{j-1}^m B_{m+1-j} \frac{(n+1)^j}{j} = \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} C_j^{m+1} B_{m+1-j} (n+1)^j.$$

因當  $n = 0$  時,  $S_m = 0$ , 即  $\sum_{j=1}^{m+1} \frac{C_{j-1}^m}{j} B_{m+1-j} = 0 (m \geq 1)$ .

例如,  $m = 4$  時,  $\sum_{j=1}^5 \frac{C_{j-1}^4}{j} B_{5-j} = 0$ , 即,

$$\frac{C_0^4}{1} B_4 + \frac{C_1^4}{2} B_3 + \frac{C_2^4}{3} B_2 + \frac{C_3^4}{4} B_1 + \frac{C_4^4}{5} B_0 = 0,$$

$$\text{也即 } \frac{1}{1} B_4 + \frac{4}{2} B_3 + \frac{6}{3} B_2 + \frac{4}{4} B_1 + \frac{1}{5} B_0 = 0,$$

故若知  $B_0, B_1, B_2, B_3$ , 可求得  $B_4$ , 餘類推 (這些  $B_i$  稱為 *Bernoulli* 數).

例如, 由  $A^{-1}$  之第一行, 得知  $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}$ , 依  $\frac{1}{1} B_7 + \frac{7}{2} B_6 + \frac{21}{3} B_5 + \frac{35}{4} B_4 + \frac{35}{5} B_3 + \frac{21}{6} B_2 + \frac{7}{7} B_1 + \frac{1}{8} B_0 = 0$ , 得  $B_7 = 0$ . (實際上

$B_{2k+1} = 0$ , 對  $k = 1, 2, \dots$ ).

因此,若能緊記最前幾個 *Bernoulli* 數,則以後各數都可求得(其實,只要記得  $B_0 = 1$  就得),故通式  $S_m = \sum_{j=1}^{m+1} C_{j-1}^m B_{m+1-j} \frac{(n+1)^j}{j}$  或  $S_m = \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} C_j^{m+1} B_{m+1-j} (n+1)^j$  實際好用.

又從上述例子可推知 *Bernoulli* 數滿足關係:  $AB = K$ , 其中  $A$  是上例矩陣  $A$  推廣至  $m+1$

列,  $B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_m \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ . 以  $m = 6$  為例,得下式:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{4} & \frac{6}{3} & \frac{4}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{5} & \frac{10}{4} & \frac{10}{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{6} & \frac{15}{5} & \frac{20}{4} & \frac{15}{3} & \frac{6}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{此矩陣式較易記憶})$$

$$\text{又 } S_m = \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} C_j^{m+1} B_{m+1-j} (n+1)^j = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_k^{m+1} B_k (n+1)^{m+1-k} \quad (\text{設 } k = m+1-j$$

代入). 以  $n = 0$  代入,可得  $\sum_{k=0}^m C_k^{m+1} B_k = 0$  ( $m \geq 1$ ), 若以單一公式而言,此二公式較前述二公式更易記憶,計算也較便.

[ 注 ] 李祥立 —— 澳門培正中學前任校長.

# “用代點法求軌跡方程”之典型範例分析

澳門數學教育研究學會 鄭志民

求曲線的方程是中學平面解析幾何的重要內容之一。

求曲線方程的問題,因已知條件的不同而分為兩大類:一類是已知曲線的形狀及確定它的條件,求曲線的方程(如已知橢圓的焦點坐標及離心率,求橢圓的標準方程);另一類是,並不知道曲線的形狀,只知道曲線(軌跡)上點所適合的條件,求曲線的方程(這種問題稱為軌跡問題)。前一類問題,一般可用“待定係數法”加以解決;而後一類問題,由於軌跡上的點所適合的條件千差萬別,常使所學者在求軌跡方程時,覺得無從下手。通常而言,這類軌跡方程的求解方法可歸納為五種:(1)直接法;(2)幾何法;(3)變換坐標法;(4)單參數法;(5)多參數法。

其中,有一種求軌跡方程的方法叫做“代點法”;它屬於求軌跡方程的“多參數法”。

什麼叫做求軌跡方程的“代點法”呢?

請先看下述的一個例子。

〔例1〕線段 $AP$ 上有一點 $B$ ,已知 $|PA| = a$ ,  $|PB| = b$  ( $a > b$ ),若 $A$ 、 $B$ 兩點分別在互相垂直的兩條直線上滑動,求 $P$ 點的軌跡。

〔解法一〕如圖1-1,取 $B$ 點所在直線為 $x$ 軸, $A$ 點所在直線為 $y$ 軸,建立直角坐標系。設 $B$ 、 $A$ 兩點的坐標分別為 $(x_1, 0)$ 及 $(0, y_1)$ ,  $P$ 點坐標為 $(x, y)$ 。

$$\text{設 } \frac{AP}{PB} = \lambda, \text{ 則 } \lambda = -\frac{|AP|}{|BP|} = -\frac{a}{b},$$

$$\therefore x = \frac{-\frac{a}{b}x_1}{1 - \frac{a}{b}}, \text{ 即 } x = \frac{-ax_1}{b-a}, \quad (1)$$

$$y = \frac{y_1}{1 - \frac{a}{b}}, \text{ 即 } y = \frac{by_1}{b-a}. \quad (2)$$

$$\text{又因 } |AB| = a - b,$$

$$\therefore x_1^2 + y_1^2 = (a-b)^2. \quad (3)$$

$$\text{由(1), 得 } x_1 = \frac{a-b}{a}x, \quad (4)$$

$$\text{由(2), 得 } y_1 = \frac{b-a}{b}y. \quad (5)$$

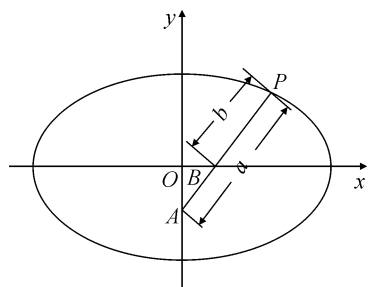


圖1-1

將(4)、(5)代入(3),得

$$\left(\frac{a-b}{a}x\right)^2 + \left(\frac{b-a}{b}y\right)^2 = (a-b)^2.$$

$\because a-b \neq 0$ , 以  $(a-b)^2$  除上式兩端, 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

此即  $P$  點軌跡的方程. 它是中心在原點, 焦點在  $x$  軸上, 長軸的長為  $2a$ , 短軸的長為  $2b$  的橢圓.

此種解法稱為“代點法”.

[注](1)“代點法”的詳細論述見胡世榮、郭瓊著:《解平面解析幾何題的一種簡捷方法——代點法》,數學通板 1983 年第 6 期.

(2)“代點法”用於求解軌跡方程特別好用. 用“代點法”求軌跡方程需要有三個條件:

(1) 有一個已知的軌跡  $f(x, y) = 0$ ; (2) 點  $P_1(x_1, y_1)$  在已知軌跡  $f(x, y) = 0$  上, 因此有  $f(x_1, y_1) = 0$ ; (3) 所求的軌跡上的點  $P(x, y)$  與點  $P_1(x_1, y_1)$  有密切的聯繫, 可以表成  $x = g(x_1)$ ,  $y = \varphi(y_1)$  的關係式; (3) 並可得  $x_1 = g'(x)$ ,  $y_1 = \varphi'(y)$ , 代入方程  $f(x_1, y_1) = 0$ , 即可得所求的軌跡方程.

作者根據澳門人的生活習慣, 把這種方法俗稱為“霸位飲茶法”——“你霸位, 我飲茶”——這種方法需要(1)有可以飲茶的茶樓, 並有飲茶位可霸; (2) 有人(甲)願意替飲茶人(乙)去霸位; (3) 甲霸到位後, 會讓乙去飲茶. 作者在澳門濠江中學教授“解析幾何”時, 用到此法, 深受學生歡迎.

“代點法”實質上是“多參數法”.

再用單參數法解這個例題.

[解法二](單參數法) 建立直角坐標係如圖 1-2 所示, 作  $PM \perp x$  軸於  $M$ ,  $PN \perp y$  軸於  $N$ .

設  $P$  點坐標為  $(x, y)$ ,  $\angle XBP = \theta$ , 取  $\theta$  為參數,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

$$\because \angle NPA = \angle XBP = \theta,$$

$$\therefore x = OM = NP = a \cos \theta,$$

$$y = MP = b \sin \theta.$$

故  $P$  點軌跡的參數方程為

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = b \sin \theta. \end{cases}$$

消去參數  $\theta$ , 得  $P$  點軌跡的普通方程為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

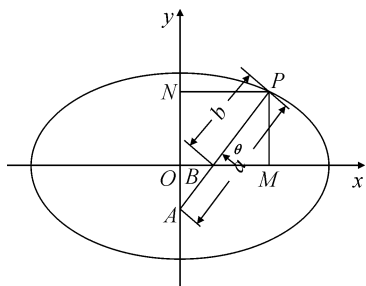


圖 1-2

[注] 有人以此解法為依據, 作出“橢圓規”. 其示意圖可參見 1963 版全國教材《平面解析幾何》中參數方程一節的習題.

〔例2〕求橢圓  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  中,斜率是  $m$  的平行弦的中點的軌跡.

〔解法一〕(代點法)(為了便於掌握“代點法”特標明其解題步驟)

(1) 設出弦的端點坐標.

設斜率是  $m$  的平行弦中的任意一條是  $AB$ , 其兩端點是  $A(x_1, y_1)$  與  $B(x_2, y_2)$ .

(2) 代入.

因點  $A(x_1, y_1)$  與點  $B(x_2, y_2)$  都在橢圓上,故將它們的坐標代入橢圓方程,得

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2, \quad b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2.$$

(3) 相減並分解因式.

上列二式相減,得

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) + a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0.$$

上式左邊分解因式得

$$b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0. \quad (\text{甲})$$

(4) 代換.

因弦  $AB$  的斜率存在(斜率為  $m$ ),故  $x_1 - x_2 \neq 0$ ,於是將(甲)的各項都除以  $x_1 - x_2$ ,得

$$b^2(x_1 + x_2) + a^2(y_1 + y_2) \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0. \quad (\text{乙})$$

因已知弦  $AB$  的斜率為  $m$ ,故

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m. \quad (\text{丙})$$

設  $AB$  的中點是  $P(\bar{x}, \bar{y})$ ,則由線段中點坐標公式,得

$$x_1 + x_2 = 2\bar{x}, y_1 + y_2 = 2\bar{y}. \quad (\text{丁})$$

將(丙)、(丁)代入(乙)並整理,得直線方程

$$b^2\bar{x} + a^2m\bar{y} = 0.$$

因此,點  $P(\bar{x}, \bar{y})$  的軌跡是這直線在橢圓內的一線段  $MN$ .

由於首先把弦  $AB$  的端點坐標代入橢圓方程,因此把這個解法命名為“代點法”.

〔解法二〕(常見解法——單參數法).

設  $AB$  是平行弦中的任意一條,其所在直線方程是  $y = mx + t$ ,  $t$  是參數.

把  $y = mx + t$  代入橢圓方程,得

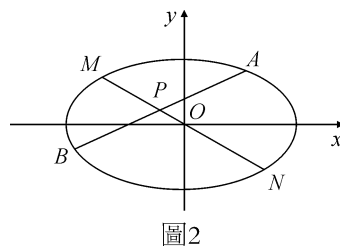
$$b^2x^2 + a^2(mx + t)^2 = a^2b^2,$$

$$\text{整理得} \quad (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mtx + a^2t^2 - a^2b^2 = 0. \quad (1)$$

這個方程的兩個根就是點  $A$  的橫坐標  $x_1$  與點  $B$  的橫坐標  $x_2$ ,於是由韋達定理,得

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mt}{a^2m^2 + b^2}. \quad (2)$$

設弦  $AB$  的中點是  $P(\bar{x}, \bar{y})$ ,則由線段中點坐標公式及(2)得



$$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{a^2 m t}{a^2 m^2 + b^2}. \quad (3)$$

因爲點  $P(\bar{x}, \bar{y})$  在弦  $AB$  上, 所以

$$\bar{y} = m\bar{x} + t. \quad (4)$$

代(3)入(4)並整理得

$$\bar{y} = \frac{b^2 t}{a^2 m^2 + b^2}. \quad (5)$$

由(3)與(5)消去參數  $t$ , 得點  $P(\bar{x}, \bar{y})$  的軌跡所在直線的普通方程是

$$b^2 \bar{x} + a^2 m \bar{y} = 0. \quad (6)$$

所求軌跡是直線(6)與橢圓相交所得的一條線段  $MN$ .

〔注〕這個解法見於人民教育出版社, 1963年編寫的高中數學課本《平面解析幾何》. 還見於國內外很多平面解析幾何書, 如美國  $P. F. Smith$  和  $A. S. Gale$  二人合著的“*The Elements of Analytic Geometry*”, 蘇聯  $H. B. 葉菲莫夫$  著的《解析幾何簡明教程》(人民教育出版社1956年中譯本), 日本笹部貞市郎著的《幾何學辭典》(科學技術文獻出版社重慶分社1980年中譯本), 上海教育學院編寫的《解析幾何》上冊(1982年版)等. 可見這個解法經歷時間很長, 流傳很廣.

〔解法三〕(常見解法——多參數法).

設斜率爲  $m$  的弦  $AB$  的中點爲  $P(\bar{x}, \bar{y})$ , 這弦的傾斜角爲  $\theta$ , 則這弦所在直線的參數方程是

$$\begin{cases} x = \bar{x} + t \cos \theta, \\ y = \bar{y} + t \sin \theta. \end{cases} \quad (t \text{ 是參數})$$

代入橢圓方程並化簡, 得

$$(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) t^2 + 2(b^2 \bar{x} \cos \theta + a^2 \bar{y} \sin \theta) t + b^2 \bar{x}^2 + a^2 \bar{y}^2 - a^2 b^2 = 0. \quad (1)$$

當點  $(\bar{x}, \bar{y})$  在橢圓內部時, 有

$$b^2 \bar{x}^2 + a^2 \bar{y}^2 - a^2 b^2 < 0,$$

因此方程(1)的判別式  $\Delta > 0$ , 於是方程(1)有兩個實數根  $t_1$  與  $t_2$ . 因爲點  $P(\bar{x}, \bar{y})$  是弦  $AB$  的中點, 所以  $t_1 + t_2 = 0$ . (2)

方程(1)中, 由韋達定理, 有

$$t_1 + t_2 = -\frac{2(b^2 \bar{x} \cos \theta + a^2 \bar{y} \sin \theta)}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}, \quad (3)$$

由(2)、(3), 得

$$b^2 \bar{x} \cos \theta + a^2 \bar{y} \sin \theta = 0. \quad (4)$$

因弦  $AB$  的斜率存在且爲  $m$ , 故  $\theta \neq 90^\circ$ , 則  $\cos \theta \neq 0$ , 於是由(4), 得

$$b^2 \bar{x} + a^2 \bar{y} \cdot \tan \theta = 0.$$

但因  $\tan \theta = m$ , 又以  $x, y$  代換  $\bar{x}, \bar{y}$ , 得所求軌跡方程爲

$$b^2 x + a^2 m y = 0.$$

因此, 所求的點  $P(\bar{x}, \bar{y})$  的軌跡是這直線上橢圓內的一段.

〔注〕這個解法見於《數學題解辭典·平面解析幾何》(上海辭書出版社 1983 年版) 第 621 題.

〔解法四〕(常見解法——多參數法).

因橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的參數方程是  $\begin{cases} x = a\cos\alpha, \\ y = b\sin\alpha, \end{cases}$  故設斜率為  $m$  的弦  $AB$  的兩個端點是

$$A(a\cos\theta, b\sin\theta), B(a\cos\varphi, b\sin\varphi).$$

則弦  $AB$  的斜率是

$$\begin{aligned} m &= \frac{b\sin\theta - b\sin\varphi}{a\cos\theta - a\cos\varphi} \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{2\cos\frac{1}{2}(\theta + \varphi) \cdot \sin\frac{1}{2}(\theta - \varphi)}{-2\sin\frac{1}{2}(\theta + \varphi) \cdot \sin\frac{1}{2}(\theta - \varphi)} \\ &= -\frac{b}{a} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta + \varphi), \end{aligned}$$

$$\text{因此得 } \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta + \varphi) = -\frac{am}{b}. \quad (1)$$

設弦  $AB$  的中點為  $P(\bar{x}, \bar{y})$ , 則

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{2}(a\cos\theta + a\cos\varphi) \\ &= a\cos\frac{1}{2}(\theta + \varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta - \varphi), \\ \bar{y} &= \frac{1}{2}(b\sin\theta + b\sin\varphi) \\ &= b\sin\frac{1}{2}(\theta + \varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta - \varphi). \end{aligned}$$

由上述二式, 得

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -\frac{a}{b} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta + \varphi). \quad (2)$$

把(1) 代入(2), 得

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -\frac{a^2 m}{b^2},$$

$$\text{即 } b^2 \bar{x} + a^2 m \bar{y} = 0,$$

因此點  $P(\bar{x}, \bar{y})$  的軌跡是這直線在橢圓內的一段.

這解法見《數學教學通訊》1980 年第 3 期.

〔例 3〕已知  $\triangle ABC$  兩頂點坐標為  $B(-2, 0), C(3, 0)$ , 第三個頂點  $A$  在直線  $l: 2x + 3y - 12 = 0$  上滑動, 求三角形  $ABC$  的重心軌跡方程. (圖 3)

〔解〕(代點法) 設  $\triangle ABC$  的重心坐標為  $P(x, y)$ , 頂點的坐標為  $A(m, n)$ , 據三角形重心

坐標公式,得

$$x = \frac{-2+3+m}{3}, y = \frac{0+0+n}{3}.$$

解之,得  $m = 3x - 1, n = 3y$ .

由於點  $A(m, n)$  在直線  $l$  上滑動,所以其坐標適合方程  $2x + 3y - 12 = 0$ , 於是有

$$2(3x - 1) + 3(3y) - 12 = 0,$$

即  $6x + 9y - 14 = 0$ , 為所求的重心的軌跡方程.

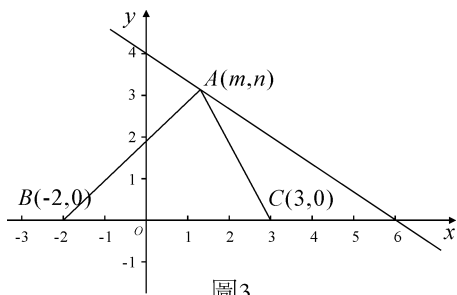


圖3

〔例4〕已知點  $P$  是圓  $O(x^2 + y^2 = a^2)$  上的動點,  $A(2a, 0)$  是定點,  $\angle POA$  的平分線  $OT$  交  $PA$  於  $T$ , 求點  $T$  的軌跡方程. (圖4)

〔解〕(代點法) 設  $T(x, y)$  是軌跡上任一點(圖4),  $P$  點的坐標為  $P(x_p, y_p)$ ,

$\because OT$  平分  $\angle POA$ ,

$$\therefore \frac{|AT|}{|TP|} = \frac{|OA|}{|OP|} = 2,$$

即  $T$  分  $AP$  成定比  $\lambda = 2$ , 由定比分點坐標公式, 得

$$\begin{cases} x = \frac{2a + 2x_p}{1 + 2}, & x_p = \frac{3x - 2a}{2}, \\ y = \frac{0 + 2y_p}{1 + 2}; & y_p = \frac{3y}{2}. \end{cases}$$

$\because P$  在曲線  $x^2 + y^2 = a^2$  上,

$$\therefore \left(\frac{3x - 2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y}{2}\right)^2 = a^2,$$

即  $\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2$  為所求的點  $T$  的軌跡方程.

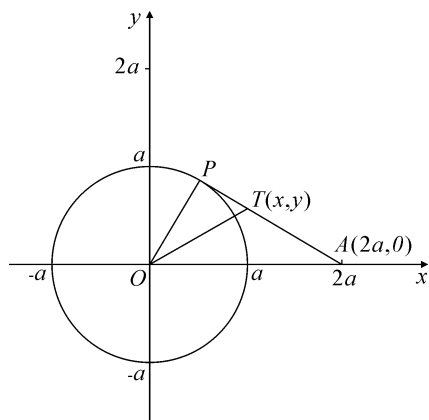


圖4

〔例5〕在  $\triangle ABC$  中,  $BC = 24$ , 其它兩邊上的兩條中線之和為 39, (a) 求  $\triangle ABC$  的重心  $G$  的軌跡方程; (b) 求  $\triangle ABC$  的頂點  $A$  的軌跡方程. (圖5)

〔解〕(代點法) (a) 建立直角坐標係如圖5, 設  $B, C$  的坐標分別為  $B(-12, 0), C(12, 0)$ ,  $AO, CD, BE$  是  $\triangle ABC$  的三條中線, 並設中線交於  $G(x_1, y_1)$ , 則因  $G$  為  $\triangle ABC$  的重心, 故有

$$|GB| + |GC| = \frac{2}{3}(|BE| + |CD|) = \frac{2}{3} \times 39 = 26.$$

由此得出,  $G$  的軌跡是  $B, C$  為焦點, 長軸長為 26 的橢圓.

$\therefore 2a = 26, 2c = 24,$

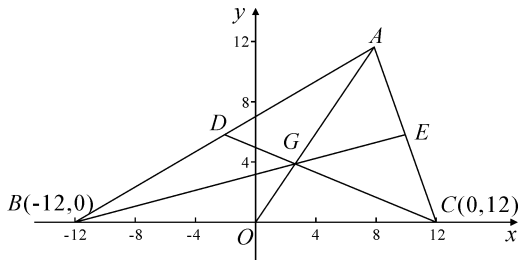


圖5



$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 25.$$

$\therefore G$  的軌跡是不包括點  $(\pm 13, 0)$  的橢圓:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 (x \neq \pm 13). \quad (1)$$

(b) 設  $A$  的坐標為  $A(x_A, y_A)$ , 則  $GO = \frac{1}{3}AO$ ,  $G$  的坐標為  $(\frac{x_A}{3}, \frac{y_A}{3})$ , 而  $G$  在橢圓(1)上,

故有

$$\frac{\left(\frac{x_A}{3}\right)^2}{169} + \frac{\left(\frac{y_A}{3}\right)^2}{25} = 1, \text{ 即 } \frac{x^2}{1521} + \frac{y^2}{225} = 1.$$

$\therefore A$  的軌跡是不包括點  $(\pm 39, 0)$  的橢圓.

[例 6] 求曲線  $C(y^2 = -4x)$  關於直線  $l(x + y = 2)$  對稱的曲線  $C'$  的方程. (圖 6)

[解](代點法) 如圖 6, 設  $Q$  在  $C$  上,  $P$  在  $C'$  上,  $P, Q$  的坐標分別為  $P(x, y), Q(x_1, y_1)$ , 曲線  $C$  和  $C'$  關於直線  $l(x + y = 2)$  對稱, 且  $P, Q$  關於直線  $l(x + y = 2)$  對稱.

$\therefore PQ$  的中點為  $R\left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2}\right)$ , 且它在直線  $l$  上,

$$\therefore \frac{1}{2}(x_1 + x) + \frac{1}{2}(y_1 + y) = 2,$$

$$\text{即 } x_1 + y_1 = 4 - x - y. \quad (1)$$

$\therefore PQ$  與直線  $l(x + y = 2)$  垂直,

$$\therefore k_{PQ} \cdot k_l = -1,$$

$$\therefore \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \cdot (-1) = -1,$$

$$\text{即 } x_1 - y_1 = x - y. \quad (2)$$

由(1), (2) 解得  $x_1 = 2 - y, y_1 = 2 - x$ .

$\therefore$  點  $Q$  在曲線  $C$  上,

$$\therefore y_1^2 = -4x_1, \text{ 則 } (2 - x)^2 = -4(2 - y),$$

也即  $(x - 2)^2 = 4(y - 2)$  為曲線  $C'$  的方程.

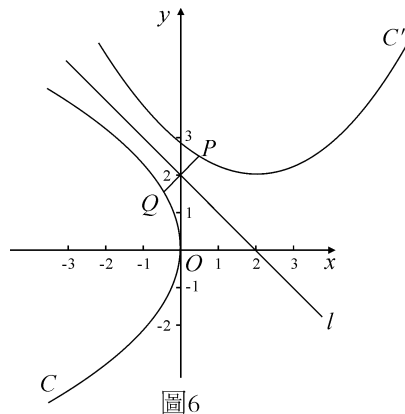


圖 6

[例 7] 給定銳角三角形  $ABC$ , 求它的內接矩形(矩形一邊與  $AB$  重合, 其餘二頂點分別在  $AC, BC$  上)的兩條對角線交點的軌跡.

[分析一] 建立如圖 7 - 1 所示的直角坐標係, 給出  $A, B, C$  三點的坐標, 設  $DEFG$  為  $\triangle ABC$  的內接矩形, 選取  $G, F$  兩點的三個坐標為參數, 因直線  $AC, BC$  的方程可以寫出, 而  $G, F$  兩點分別在直線  $AC, BC$  上, 故可得含這三個參數的兩個等式. 設  $M(x, y)$  為矩形對角線  $DF$  的中點, 又可得到含  $x, y$  及三個參數的兩個等式, 通過上述四個等式, 即可求  $M$  點的軌跡方程.

[解法一](代點法) 取  $AB$  所在直線為  $x$  軸, 過  $C$  垂直於  $AB$  的直線為  $y$  軸. 設  $A, B, C$  的

坐標分別為 $(-a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 、 $(0, c)$ ,  $a > 0, b > 0, c > 0$ ,  $EFGH$ 為 $\triangle ABC$ 的內接矩形,  $G$ 、 $F$ 的坐標分別為 $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_1)$ , 對角線交點為 $M(x, y)$ , 則 $D$ 、 $E$ 的坐標分別為 $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$  (見圖 7-1).

因直線 $AC$ 、 $BC$ 的方程分別為

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{c} = 1, \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1,$$

又 $G$ 、 $F$ 分別在此二直線上,

$$\text{故} \quad \frac{x_1}{-a} + \frac{y_1}{c} = 1, \quad (1)$$

$$\frac{x_2}{b} + \frac{y_1}{c} = 1. \quad (2)$$

因 $M$ 為 $DF$ 的中點,

$$\text{故} \quad x_1 + x_2 = 2x, \quad (3)$$

$$y_1 = 2y. \quad (4)$$

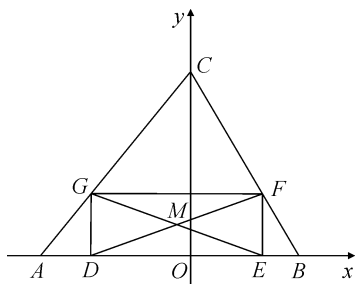


圖7-1

用 $-a$ 乘(1)的兩邊,得

$$x_1 - \frac{a}{c} y_1 = -a. \quad (5)$$

用 $b$ 乘(2)的兩邊,得

$$x_2 + \frac{b}{c} y_1 = b. \quad (6)$$

(5) + (6), 得

$$(x_1 + x_2) + \frac{b-a}{c} y_1 = b-a. \quad (7)$$

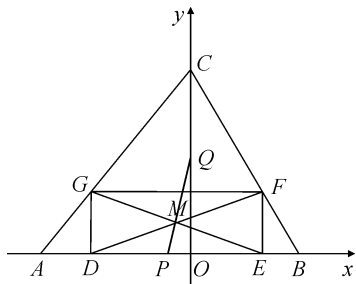


圖7-2

將(3)、(4)代入(7),並用 $c$ 乘方程兩邊,得

$$2cx + 2(b-a)y = c(b-a) \left( 0 \leq y \leq \frac{c}{2} \right). \quad (8)$$

方程(8)即 $M$ 點的軌跡方程, $M$ 點的軌跡是以 $Q\left(0, \frac{c}{2}\right)$ 和 $P\left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$ 為端點的線段(兩個端點是軌跡的極限點,因此算軌跡上的點)(見圖 7-2).

當 $a = b$ 時,則 $M$ 點的軌跡方程為 $x = 0 \left( 0 \leq y \leq \frac{c}{2} \right)$ .

本題還可用單參數法解之.

〔分析二〕建立如圖 7-2 所示的直角坐標系, 給出 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三點的坐標. 當內接矩形 $DEFG$ 變動時, 取 $|EF| = m$ 為參數, 則 $G$ 、 $F$ 的坐標以及 $D$ 點的坐標均可用 $m$ 表示. 由於 $M$ 為 $DF$ 的中點, 因此 $M$ 的坐標也可用 $m$ 表示, 於是可得 $M$ 點軌跡的參數方程.

〔解法二〕(單參數法) 建立如圖 7-2 所示的直角坐標系. 設 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三點坐標分別為 $(-a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 、 $(0, c)$ .

$a, 0), (b, 0), (0, c), a > 0, b > 0, c > 0, DEFG$  為內接矩形, 其對角線交點為  $M(x, y)$ .

則直線  $AC, BC$  的方程分別為

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{c} = 1, \quad (1)$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1. \quad (2)$$

設  $|EF| = |DG| = m$  ( $m$  為參數),

則直線  $GF$  的方程為

$$y = m. \quad (3)$$

解(1)、(3) 組成的方程組, 得  $G$  點的坐標為  $\left(-a\left(1 - \frac{m}{c}\right), m\right)$ , 因此  $D$  點坐標為  $\left(-a\left(1 - \frac{m}{c}\right), 0\right)$ .

解(2)、(3) 組成的方程組, 得  $F$  點的坐標為  $\left(b\left(1 - \frac{m}{c}\right), m\right)$ .

因  $M$  為  $DF$  的中點, 故  $M$  點的坐標為

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(b - a)\left(1 - \frac{m}{c}\right), \\ y = \frac{m}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

$$(0 \leq m \leq c) \quad (5)$$

此即  $M$  的軌跡的參數方程.

由(5) 得  $m = 2y$ ,

代入(4), 得

$$2cx + 2(b - a)y = c(b - a).$$

此即為軌跡的普通方程.

〔例8〕二直線分別繞着點  $A(-5, 0)$  及點  $B(5, 0)$  旋轉, 如果二直線的縱截距的乘積等於 25, 求這兩條直線交點的軌跡.

〔分析〕如果兩條動直線的縱截距分別為  $b, b'$ , 藉助  $b$  與  $b'$  可求出兩條直線族的方程, 還有  $b \cdot b' = 25$ , 由這三個等式消去  $b, b'$ , 即得軌跡方程.

〔解〕如圖8, 設通過  $A, B$  的直線分別為  $l, l'$ , 它們的縱截距分別為  $b, b'$ ,

$$\text{則} \quad bb' = 25. \quad (1)$$

又直線  $l$  的方程為

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2)$$

直線  $l'$  的方程為

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{b'} = 1, \quad (3)$$

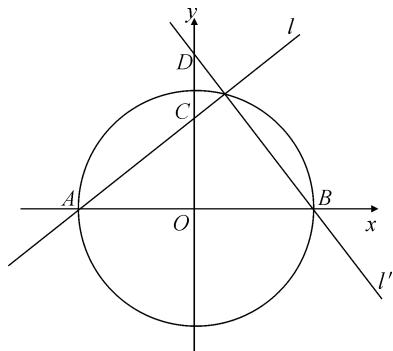


圖8

由(2),得  $\frac{y}{b} = 1 + \frac{x}{5}$ , (4)

由(3),得  $\frac{y}{b'} = 1 - \frac{x}{5}$ , (5)

(4) × (5) 得  $\frac{y^2}{bb'} = 1 - \frac{x^2}{25}$ ,

將(1) 代入上式,得

$$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{x^2}{25},$$

故兩條直線交點的軌跡方程為

$$x^2 + y^2 = 25.$$

由於極限點  $A, B$  算作軌跡上的點,於是軌跡是以原點為圓心,5 為半徑的圓.

〔例 9〕過等邊雙曲線  $x^2 - y^2 = a^2$  上一點  $P$  的法線分別交實軸、虛軸於  $K, L$ , 當  $P$  點在雙曲線上運動時,求  $KL$  中點  $M$  的軌跡.

〔分析〕如圖 9,取等邊雙曲線上點  $P$  的坐標  $x_1, y_1$  為參數,容易寫出過  $P$  點的法線方程,因而可知  $K, L$  兩點的坐標.於是,根據  $M$  是  $KL$  的中點可得到兩個等式,再有  $P$  點在雙曲線上,又可得到一個等式,由這三個等式消去參數  $x_1, y_1$ ,即得所求的軌跡方程.

〔解〕(代點法) 設雙曲線  $x^2 - y^2 = a^2$  上任一點  $P$  的坐標為  $(x_1, y_1)$ , 點  $M$  的坐標為  $(x, y)$ .

因過點  $P$  的雙曲線切線的斜率為  $\frac{x_1}{y_1}$  ( $y_1 \neq 0$ ), 過點  $P$  的法線斜率為  $-\frac{y_1}{x_1}$ . 於是過點  $P$  的法線方程為

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

即  $y_1 x + x_1 y = 2x_1 y_1$ .

因此點  $K$  的坐標為  $(2x_1, 0)$ , 點  $L$  的坐標為  $(0, 2y_1)$ .

∴  $x = x_1$ , (1)

$y = y_1$ . (2)

又  $P$  點在等邊雙曲線上,

故  $x_1^2 - y_1^2 = a^2$ . (3)

由(1)、(2)、(3) 消去  $x_1, y_1$ , 得

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (4)$$

當  $y_1 = 0$  時,依  $P$  點在雙曲線的左支或右支,分別取  $M$  點為軌跡的極限點  $(-a, 0)$  或  $(a, 0)$ . 於是可知, (4) 為所求的軌跡方程. 軌跡為等邊雙曲線本身.

〔例 10〕設橢圓的方程是  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ , 點  $A$  的坐標是  $(m, -2)$ , 點  $B$  是橢圓上任意一點, 點  $P$  分  $\overline{BA}$  所成的比為 2, 已知當  $B$  在橢圓上移動時, 點  $P$  的軌跡關於直線  $x = 1$  對稱, 求  $m$

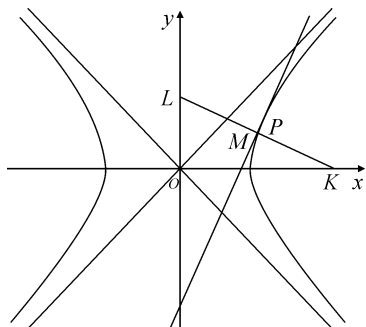


圖9

的值及點  $P$  的軌跡方程(91 年國內重點高校入學試題、理科)。

〔解〕(代點法) 設點  $P$  的坐標為  $P(x, y)$ , 點  $B$  的坐標為  $B(x_0, y_0)$ ,

$\therefore$  點  $P$  分  $\overline{BA}$  所成的比為 2,  $\therefore \lambda = \frac{BP}{PA} = 2$ .

點  $P(x, y)$  的坐標為

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 + \lambda m}{1 + \lambda} = \frac{x_0 + 2m}{3}, \\ y = \frac{y_0 + \lambda \times (-2)}{1 + \lambda} = \frac{y_0 - 4}{3}, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = 3x - 2m, \\ y_0 = 3y + 4, \end{cases}$$

$\therefore B(x_0, y_0)$  在橢圓上,  $\therefore \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{16} = 1$ ,

$$\text{則 } \frac{(3x - 2m)^2}{9} + \frac{(3y + 4)^2}{16} = 1.$$

$$\text{整理, 得 } (x - \frac{2}{3}m)^2 + \frac{(y + \frac{4}{3})^2}{\frac{16}{9}} = 1. \quad \textcircled{1}$$

$\therefore$  點  $P$  的軌跡關於直線  $x = 1$  對稱,

$\therefore$  橢圓 ① 的中心  $(\frac{2}{3}m, -\frac{4}{3})$  在直線  $x = 1$  上,

$$\therefore \frac{2}{3}m = 1, m = \frac{3}{2}.$$

因此, 點  $P$  的軌跡方程為

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + \frac{4}{3})^2}{\frac{16}{9}} = 1.$$

〔例 11〕求橢圓  $x^2 + 4y^2 = 4$  關於直線  $x + y = 4$  成對稱的圖形之方程。

〔分析〕如果  $A, B$  兩點關於直線  $l$  對稱, 它們必須滿足:

- (1) 直線  $AB$  垂直於直線  $l$ ;
- (2) 線段  $AB$  的中點在直線  $l$  上。

要求橢圓  $x^2 + 4y^2 = 4$  關於直線  $x + y = 4$  成對稱的圖形之方程, 實際上就是求橢圓  $x^2 + 4y^2 = 4$  上任一點關於直線  $x + y = 4$  對稱的點所組成之圖形的方程。

另外, 如果兩個圖形是對稱圖形, 那麼它們的形狀和大小是相同的, 只是位置不同, 因此, 要求橢圓的對稱圖形的方程, 關鍵是找

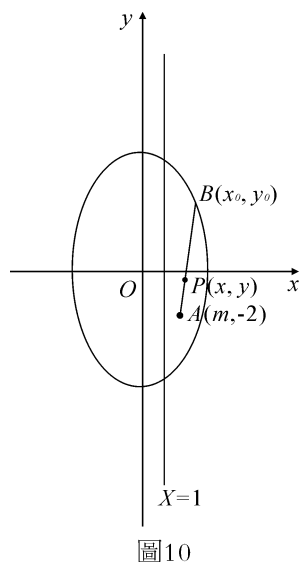


圖10

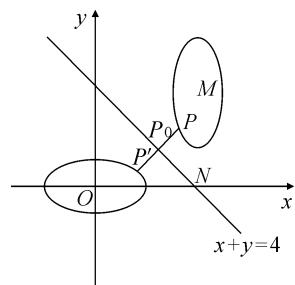


圖11-1

到對稱橢圓的中心和對稱軸的位置,結合長、短軸的大小,就可以寫出方程.

〔解法一〕(代點法) 設  $P'(x', y')$  是橢圓  $x^2 + 4y^2 = 4$  上任意一點,  $P'$  關於直線  $l: x + y = 4$  的對稱點是  $p(x, y)$ , 線段  $PP'$  的中點是  $p_0(x_0, y_0)$ .

$$\because pp' \perp l$$

$$\therefore k_{pp'} = -\frac{1}{k_l}, \text{ 而 } k_l = -1,$$

$$\therefore \frac{y - y'}{x - x'} = 1.$$

$$\text{整理, 得 } x' - y' = x - y. \quad (1)$$

$$\because pp' \text{ 的中點是 } P_0(x_0, y_0),$$

$$\therefore x_0 = \frac{x + x'}{2}, y_0 = \frac{y + y'}{2},$$

$$\because P_0(x_0, y_0) \text{ 在 } (l)x + y = 4 \text{ 上},$$

$$\therefore \frac{x + x'}{2} + \frac{y + y'}{2} = 4,$$

$$\text{即 } x' + y' = 8 - x - y, \quad (2)$$

$$\text{由方程組 } \begin{cases} x' - y' = x - y, \\ x' + y' = 8 - x - y, \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{得 } \begin{cases} x' = 4 - y, \\ y' = 4 - x. \end{cases}$$

$$\because P'(x', y') \text{ 在橢圓 } x^2 + 4y^2 = 4 \text{ 上},$$

$$\therefore (4 - y)^2 + 4(4 - x^2) = 4,$$

$$\text{即 } 4x^2 + y^2 - 32x - 8y + 76 = 0 \text{ 爲所求方程.}$$

〔解法二〕(常見解法).

$$\text{將 } x^2 + 4y^2 = 4, \text{ 變爲 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

則此橢圓中心在  $(0, 0)$ , 半長軸長爲 2, 半短軸長爲 1.

設  $O(0, 0)$  關於  $(l)x + y = 4$  的對稱點爲  $M(a, b)$ , 則  $K_{OM} = 1$ ,

$$\text{即 } \frac{b}{a} = 1.$$

又  $\because$  線段  $OM$  的中點坐標爲  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ , 且  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$  在  $l$  上,

$$\therefore \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 4,$$

$$\text{即 } a + b = 8.$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{b}{a} = 1, \\ a + b = 8, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} a = 4, \\ b = 4. \end{cases}$$

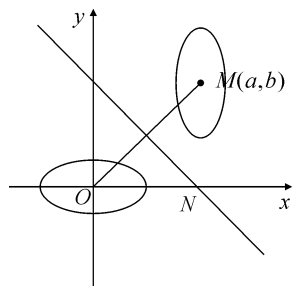


圖11-2

又橢圓的長軸所在的直線  $y = 0$  與  $l$  的交點為  $N(4, 0)$ , 而所求的橢圓的長軸所在的直線過  $M$  和  $N$ , 即  $x = 4$ , 結合圖形可知, 所求橢圓方程為

$$\frac{(x-4)^2}{1} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1,$$

即  $4x^2 + y^2 - 32x - 8y + 76 = 0.$

〔例 12〕已知橢圓族  $4x^2 + 5y^2 - 8mx - 20my + 24m^2 - 20 = 0$  ( $m$  為實參數).

(1) 求這些橢圓的中心的軌跡方程;

(2) 求被每一個橢圓截得的線段都等於  $\frac{5}{3}\sqrt{5}$  的直線方程.

〔解〕(1) 原方程經配方, 可得  $4(x^2 - 2mx + m^2) + 5[y^2 - 4my + (2m)^2] = -24m^2 + 20 + 4m^2 + 5 \times (2m)^2$ . 整理, 得

$$\frac{(x-m)^2}{5} + \frac{(y-2m)^2}{4} = 1. \quad (1)$$

橢圓的中心為  $(m, 2m)$ ,

設  $x = m, y = 2m$ ,

由  $\begin{cases} x = m, \\ y = 2m, \end{cases}$  消去  $m$ , 得  $y = 2x$ .

$\therefore$  橢圓族的橢圓的中心軌跡方程是  $y = 2x$ .

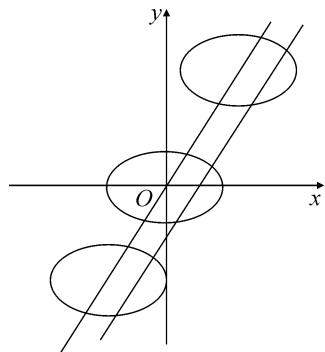


圖12

(2) 由於橢圓族中任一橢圓都可由橢圓  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  平移得到, 被所有橢圓截得相等的線段的直線必與直線  $y = 2x$  平行.

設所求的直線方程為  $y = 2x + b$ , 代入方程  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 得

$$24x^2 + 20bx + 5b^2 - 20 = 0. \quad (2)$$

設  $x_1, x_2$  為方程(2)的兩根, 據題意, 有

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \left(\frac{5}{3}\sqrt{5}\right)^2.$$

再以  $y_1 = 2x_1 + b$  和  $y_2 = 2x_2 + b$  代入上式, 得

$$5(x_1 + x_2)^2 = \frac{125}{9}, (x_1 - x_2)^2 = \frac{25}{9},$$

即  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{25}{9}.$

由(2), 據韋達定理, 得

$$\left(\frac{20b}{24}\right)^2 - 4\left(\frac{5b^2 - 20}{24}\right) = \frac{25}{9},$$

可解得  $b = \pm 2$ .

$\therefore y = 2x \pm 2$  即為所求的直線方程.

\*〔例 13〕已知橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $A, B$  是橢圓上的兩點, 線段  $AB$  的垂直平分

線與  $x$  軸相交於點  $P(x_0, 0)$ . 證明:  $-\frac{a^2 - b^2}{2} < x_0 < \frac{a^2 - b^2}{a}$  (92 年國內高校入學試題、理科).

〔証法一〕設  $A, B$  的坐標為  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ . 因線段  $AB$  的垂直平分線與  $x$  軸相交, 所以  $AB$  不平行於  $x$  軸, 即  $x_1 \neq x_2$ .

又交點為  $P(x_0, 0)$ , 且  $|PA| = |PB|$ ,

$$\text{則 } \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2},$$

$$\therefore (x_1 - x_0)^2 + y_1^2 = (x_2 - x_0)^2 + y_2^2,$$

$$\text{整理, 得 } 2(x_2 - x_1)x_0 = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2, \quad (1)$$

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1,$$

$$\therefore y_1^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2, \quad y_2^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_2^2.$$

將上兩式代入(1), 得

$$\begin{aligned} 2(x_2 - x_1)x_0 &= x_2^2 - x_1^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_2^2 - b^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 \\ &= (x_2^2 - x_1^2) \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right), \end{aligned}$$

$$\therefore x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (2)$$

$$\therefore -a \leq x_1 \leq a, \quad -a \leq x_2 \leq a, \quad x_1 \neq x_2,$$

$$\therefore -2a < x_1 + x_2 < 2a, \text{ 因此 } -a < \frac{x_1 + x_2}{2} < a,$$

$$\therefore -a \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} < \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} < a \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

$$\text{即 } -\frac{a^2 - b^2}{a} < x_0 < \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

〔証法二〕設  $A, B$  的坐標分別為  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 因  $P(x_0, 0)$  在  $AB$  的垂直平分線上, 以點  $P(x_0, 0)$  為圓心,  $|PA| = r$  為半徑的圓  $P$  過  $A, B$  兩點, 所以圓  $P$  的方程為

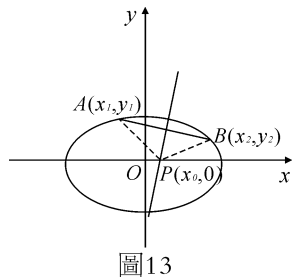
$$(x - x_0)^2 + y^2 = r^2,$$

與橢圓方程聯立, 消去  $y$ , 得

$$(x - x_0)^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 = r^2 - b^2,$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2x_0 x + x_0^2 - r^2 + b^2 = 0. \quad \textcircled{1}$$

$\therefore A, B$  是橢圓與圓  $P$  的交點, 故  $x_1, x_2$  為方程 ① 的兩個根, 由韋達定理, 得





$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2}{a^2 - b^2} x_0,$$

$\therefore$

$$-a \leq x_1 \leq a, \quad -a \leq x_2 \leq a,$$

且

$$x_1 \neq x_2. \quad \therefore \quad -2a < x_1 + x_2 < 2a.$$

$\therefore$

$$-2a < \frac{2a^2}{a^2 - b^2} x_0 < 2a$$

$\therefore$

$$-\frac{a^2 - b^2}{a} < x_0 < \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

# 小議劉欣儒老師公開課《年、月、日》

澳門數學教育研究學會 鄧海棠

由教育暨青年局始於 1996 年主辦的教學設計獎勵計劃，為推動本澳各學科的學術研究，提昇相關科目的教學人員的專業素質，激勵創思型的課堂教學，增進單位時間內的教學成效，培養教學人員課程與教材開發和教學研究的能力，給廣大教育工作者提供了一個百家爭鳴、取長補短、博納優異的實用平臺。

2014 年 11 月 29 日觀摩了在聖保祿學校進行的 2013/2014 學年教學設計獎勵計劃 – 教學公開課（中、小學數學科）的示範課，確有裨益，收穫良多。

該課節的教案如下：

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |      |          |              |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|----------|--------------|---------|
| 學校                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 英才小學 | 年級：P3    | 日期:11 月 29 日 | 教時:1 課時 |
| 學科                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 數學   | 課題:年、月、日 | 設計者：劉欣儒      |         |
| <b>教學目標：</b><br><b>（一）基礎知識目標：</b><br>1、初步認識時間單位年、月、日，了解年、月、日之間的關係。<br>2、知道大月、小月的知識，並掌握各月及全年的天數。了解多種記住每個月天數的方法。<br>3、初步學會判斷某一年是平年還是閏年，了解有關平年、閏年等方面的知識。<br><b>（二）能力訓練目標：</b><br>1、培養自主探索與小組合作的能力。<br>2、培養能根據觀察與發現，用數學推理的方法來思考和解決問題的能力。<br><b>（三）情感態度目標：</b><br>1、體會生活中處處有數學，數學與日常生活的緊密聯繫。<br>2、初步感受數學與科學的聯繫。 |      |          |              |         |
| <b>教學重點：</b> 了解年、月、日之間的關係。掌握各月及全年的天數並了解多種記住每個月天數的方法。了解平年和閏年。<br><b>教學難點：</b> 平年和閏年的規律探究。                                                                                                                                                                                                                   |      |          |              |         |

制定依據：

(1) 教材分析：

《年、月、日》這一課是北師大版教材三年級上冊第七單元第一課。在此之前學生們已經有了一年級上冊的《認識鐘錶》和二年級上冊的《認識時分秒》《體驗時間的長短》的基礎。時間單位是較為抽象的計量單位。低年級的學生只能理解和掌握那些與他們的實際生活最為接近的時間單位，如時、分等。隨著年齡的增長，學生才能逐步理解離他們生活較遠的較大的時間單位，如年、月等。年、月都是較大的時間單位，理解一年或一個月的時間有多長需要藉助一定的想像力。而學生們到了三年級，對於年月日基本上已經有了初步的概念，但並不完整，因此要讓學生通過年曆進行一系列的活動，也讓學生在獨立探索和小組合作的基礎上初步了解年、月、日的基本含義以及互相關係。為了幫助學生記憶每個月有多少天，老師可以介紹口訣以及拳頭點數法。在了解平年和閏年時，更要讓學生們在自主探究中得到答案，培養學生們主動思考和探究的能力。

(2) 學情分析：

學生之前的數學學習中已經了解了時、分、秒，並在實際生活中積累了年、月、日方面的感性經驗，有關年、月、日方面的知識也越來越多的出現在他們的生活和學習內容中，漸漸形成較長時間觀念的基礎。本課正是在此基礎上向學生介紹有關年、月、日等時間單位和大月、小月等方面的知識。所以學生們在接受基本知識時並不困難，而難點落在學生探究能力、概括能力、觀察能力的培養。學習過程中培養學生主動思考的能力，引道他們自己尋找規律，提高學生的自信心的同時，增加他們對數學的興趣。

教學過程

| 教學環節         | 教師活動                                                                                                    | 學生活動                           | 設計意圖                                                 |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------------------------|
| 一、有向開放、確定主題。 | 1. 談話引入：<br>劉老師給大家準備了小禮物。<br>說一說：你拿到了哪一年的年曆？<br>2. 揭題：年曆的秘密。                                            | 獨立觀察後回答。                       | 通過送禮物的設計，緩解學生緊張氣氛，激發學生對本節課的學習興趣。                     |
| 二、互動生成       | 1. 認識年、月、日<br>請根據自己小組得到的年曆，結合已有的生活經驗，討論一下：你知道了哪些數學資訊。<br>全班交流回饋。<br>2、進一步探究：哪幾個月是大月，哪幾個月是小月。<br>全班交流回饋。 | 小組討論。<br><br>小組合作探究。將結論呈現在黑板上。 | 培養學生的自主探究的學習能力。讓學生根據已有的關於年月日的生活經驗，結合年曆的資訊，得到正確的知識資訊。 |

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                        |                                                                                                           |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|        | <p>3、你能找到一個好方法更快的記住大月和小月嗎？</p> <p>回饋：</p> <p>(1) 拳記法：</p> <p>(2) 規律法：</p> <p>(3) 口訣記憶法：</p> <p>4、互動遊戲：</p> <p>老師報月份，如果是大月男生站起來，如果是小月女生站起來。</p>                                                                                                                                                | <p>小組討論，學生交流。</p>                                                      | <p>巧記的方法既能調動學生的學習興趣，同時也加深了年月日的特殊性的記憶。</p> <p>通過遊戲的方式讓學生們在快樂的過程中記憶大月和小月。</p>                               |
| 三、推進拓展 | <p>1、平年和閏年：</p> <p>當 2 月是 28 天時，那一年叫做平年。有 365 天。</p> <p>當 2 月是 29 天時，那一年叫做閏年。有 366 天。</p> <p>如果我們要確定某一年是閏年還是平年，我們就要看哪個月的天數？</p> <p>2、觀察近 10 年 2 月份的天數，把表格填寫完整，填完以後，說說你發現了什麼？</p> <p>回饋：</p> <p>如果能被 4 整除，一般就是閏年。</p> <p>補充小知識。（視頻）</p> <p>3、判斷平年閏年：</p> <p>1900 是不是閏年呢？</p> <p>補充小知識。（視頻）</p> | <p>獨立思考回答。</p> <p>師生一起完成表格。獨立思考，小組討論。</p> <p>獨立思考後回答。</p> <p>學生傾聽。</p> | <p>通過遊戲自然地過渡到平年和閏年的探究。</p> <p>激發學生們通過小組討論，主動學習，在老師的引道下慢慢發現閏年與 4 之間的聯繫。</p> <p>引發思維的碰撞，激起學生們想要探究根源的願望。</p> |
| 四、鞏固延伸 | <p>1、鞏固：今天學習了哪些關於年月日的知識？</p> <p>2、練習：真相只有一個。</p> <p>全班回饋。</p> <p>3、小結：數學來源於生活，年月日在我們的生活中的運用也是十分廣泛的。回家收集關於年月日在生活中的運用。</p>                                                                                                                                                                      | <p>學生獨立回憶。</p> <p>小組討論後，全班反饋交流。</p>                                    | <p>通過學生們熟知的動漫，激起學生們的興趣。並讓學生們學會將課堂學習到的知識運用到生活中。</p>                                                        |

我認為這是一堂非常優秀、實用、有效的公開課。教案已經由過去單一的教材分析添加了學情分析，教學目標也由以往的基礎知識目標、能力訓練目標融合了情感態度目標。從教案中可以看到教師為主道、學生為主體的理念真義，也體現了生活中處處有數學，數學與日常生活的聯繫緊密這一教學思維。

劉欣儒老師在教學過程中十分注重引道學生如何學、如何做，教學目標明確，符合知識的認知規律，教學設計充分關注了學生情感與態度，知識與技能，過程與方法。體現數學源於生活、高於生活、回歸生活的真諦。

劉欣儒老師準確地把握教材的內容結構，體現教學內容的科學性、準確和邏輯性。她注重數學知識的內在聯繫。內容呈現方式符合學情，她能夠以教材為基本依據，深入挖掘教材內涵，合理利用生活數學資源，做好教學內容適當延伸。

劉欣儒老師的教學環節過渡很自然，學生自主學習得到充分體現。學生在老師的激勵下，有濃厚的學習興趣，積極主動地投入到學習活動中，並能較好地運用自主學習的時間和空間，經歷數學知識形成的過程，螺旋式地對數學知識進行體驗和探究。劉欣儒老師的課堂樸實，知識點講解細緻透切，注重教法的研究和學法的指道，注重學生數學能力和數學素養的培養。

劉欣儒老師的數學基本功扎實，語言規範準確，生動形象，邏輯嚴謹，教學中突出引道和啟發，綜合使用學具、教具、以及現代教育技術等各種教學媒體，實效性強，做到媒體與學科教學內容的有機整合。她的教學在感召力、練習設計、教學方法、手段的運用藝術方面有一定的特色，及時積極評價學生的學習過程，激發學生的主體意識，使學生獲得成功體驗，有利於促進學生思維的發展。

劉欣儒老師這堂課充分體現了老師為主道，學生為主體的原則。所有學生時刻扮演著“演員”的角色，學生讀、寫、說、思，環環相扣，忙而不亂，都有自己的事可做。只是，她經常問學生“好不好”，學生循例一致也說“好”這樣一個環節（也是細節）在物理學上講是無用功，課堂教學上來講是沒效益的舉動。

我認為，一堂課，老師要道得好，關鍵在於問題設計得好。問題過難了，學生一籌莫展、無從下手，空耗時間不說，學生的積極性也消磨沒了；問題過於簡單，學生張口即出，缺乏思維空間，起不到提高學生分析思考能力的作用。因而應該結合學情運用教育的“最近發展區”進行問題設計。

縱觀全課，感覺國情澳情教育的愛國愛澳方面的元素較為欠缺。可以在練習或者課後練習中設置，5年特首選舉、4年立法會議員選舉等等，既能跨越常識、公民科目又能理論聯繫實際的內容。這也符合政府一向致力於愛國愛澳教育和學科知識內容的多元有機整合的方針。教材P68中的練一練就有一些有關國慶和親情方面的練習題可以加以使用，不知為何棄之不用？

課堂之初始派發年曆後進行的小組討論，稍稍欠缺目的性，有些盲目，應該提出一個方向給學生。當然，這個互動環節中，學生也從中探討出來了不少有價值的知識點。比如“每年

有 12 個月,多數是 31 天”,“2 月只有 28 天”等等.在這裏,我覺得可以為學生準備類似教材 P67 的數據記錄表,以便於學生在組內進行各人手中年曆的各月份的天數作統計,會更加一目了然,直觀清晰.

在定義了大月和小月之後,有學生提到“大月和小月中為何沒有 2 月”,“2 月是大月還是小月”這些問題,老師沒有及時借機展開解釋說明以加強 2 月這個特殊的情況,有些失機了.

“一年有 365 天”這個說法也不夠精準,因為有時是 366 天的情況.可以糾正為“大多數的情形下是一年有 365 天的”.

對於式子: $31 \times 7 + 30 \times 4 + 28 = 365$  的讀法,學生講成“4 乘 30”,教師糾正為“30 乘 4”,其實學生沒有說錯,反而教師的說法不太正確,應該是“30 乘以 4”,這是一個有很強邏輯的被乘數與乘數的乘法問題,在除法中體現得尤其深刻!

“7 個大月心中裝,7 前單數 7 後雙”,劉欣儒老師的記憶絕訣令我縈繞腦海.只是在拳頭記憶法中,把左手拳頭從右到左,再從左折返向右進行月份記憶時,她忘記了讓學生把從右到左盡頭後再重復從右到左也是符合月份規律的這個情況探究分享了.當然,這一點也可以放在下一節課的溫故而知新時進行.

歌訣記憶法中的“一三五七八十臘(12 月)”,我覺得有必要解釋一下,臘月是農曆(陰曆)的 12 月,而非年曆中的陽曆 12 月(陰陽還是有蠻大的差別的).

對於平年、閏年這個知識點,有學生提到“每 3 年後”、“每 4 年”、“每隔 3 年”就有一個閏年,這些都是正確的說法,教師應該及時作出反饋評價.

“2024 年是閏年,因為  $2024 \div 4 = 506$ ,沒有餘數,所以 2024 年是閏年”.對於“ $2024 \div 4 = 506$ ,沒有餘數”這個說法有誤.因為這不是沒有餘數,只是餘數為 0,可以不寫而已.

判斷“1900 年是不是閏年呢?”是這節課的一個高潮,學生完全被帶動進來了,一探究竟的強烈求知慾被激發挑動起來了.對於做教學和研究以及學習的人來說,這團火是必不可少的.劉欣儒老師成功地點火了,煽了風,燎了原,最後在英文版本的一個視頻解說中獲得了想要的答案,得到了深化和昇華.這當中,劉老師也已經發覺到了這個視頻如果有中文的版本(或者配音)解說的話,效果會更加好.我深以為然.其實,即使沒有也無妨,因為可以讓學生在教材 P69 的“你知道嗎?”的知識閱讀的規定中找到解釋.

瑕不掩瑜,總體來說,我認為劉欣儒老師這一堂課是一節非常優秀、實用、有效的公開課.

順便說一下,時至今日,學生的數學素養已經由基本的知識、基本的數學技能的“雙基”完善到了包括基本的數學思想、基本的數學活動經驗在內的“四基”.建議教師在課堂教學設計時考慮以下一些因素:如何有效銜接前後課節的內容?能否延伸課內外知識?怎樣培養學生提出問題、探索問題、解決問題的能力?數學素養的四基如何高效地融和、怎樣優質地整合等等.這些都是作為培養新世紀學生創新能力的教育工作者所需要面對、思索和考量的課題.據我所知,澳門數學教育研究學會在汪甄南先生和鄭志民先生的帶領下,對以上這些方面都不遺餘力地進行了大量卓有成效的推動和推廣,為本澳的數學教育工作注入了沸騰的動力、指引了前行的方向.

# 圖形的全等

沈陽市第七中學 張迎

## ● 教學目標：

1. 藉助具體情境和圖案，經歷觀察、發現和實踐操作等過程，了解全等圖形的意義，理解全等三角形的概念和性質，能識別全等三角形中的對應邊、對應角。
2. 經歷認識生活中全等圖形的過程，培養學生的觀察能力；經歷動手操作的過程，培養學生的動手操作能力。
3. 初步學會在具體情境中從數學的角度發現問題、提出問題、分析問題、解決問題，從而掌握一些基本的數學思想方法。
4. 設置數學活動，激發學生對數學的好奇心和求知慾；在學習中，讓學生感受成功的快樂，樹立學好數學的信心。同時，使學生養成獨立思考、合作交流等學習習慣，形成嚴謹求實的科學態度。

## ● 教學重點：

了解全等圖形的意義，理解全等三角形的概念和性質，能識別全等三角形中的對應邊、對應角。

## ● 教學難點：

能識別全等三角形中的對應邊、對應角。

## ● 教學方法：

講練結合法。

## ● 教學過程：

### I. 巧設情景，引入新課。

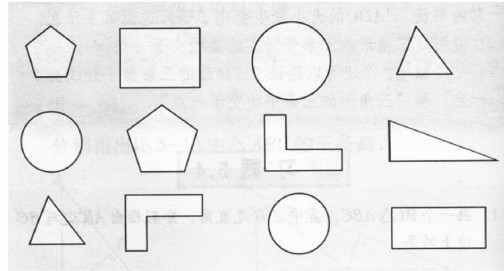
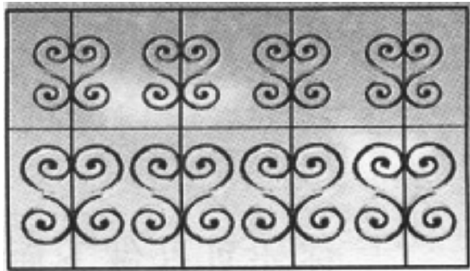
師：同學們好，我這裏帶了一些圖片，大家仔細觀察，看它們有什麼特點？

生：每組圖片的圖案完全一樣，大小也一樣。

生活中有一些圖形完全一樣。如果把它們重疊在一起能夠重合，你能找出這樣的圖形嗎？

生：兩面國旗、幾張郵票、還有柵欄的圖片、下面圖形中的圓。

師：對了。像這樣的圖形我們說它是全等的。



## II. 師生互動,探究新知.

### (一) 全等圖形的定義和特徵:

**全等圖形的定義:**能夠完全重合的圖形稱為全等圖形.

師:你能說一說身邊的全等圖形嗎?

生:本子裏的紙張、蝴蝶的兩個翅膀、左右兩只鞋的鞋底……這些都能重合,都是全等圖形.

師:在這些幾何圖形中你能找到全等圖形嗎?

生:1) 和 9) 全等. 2) 和 8) 全等. 3) 和 6) 全等.

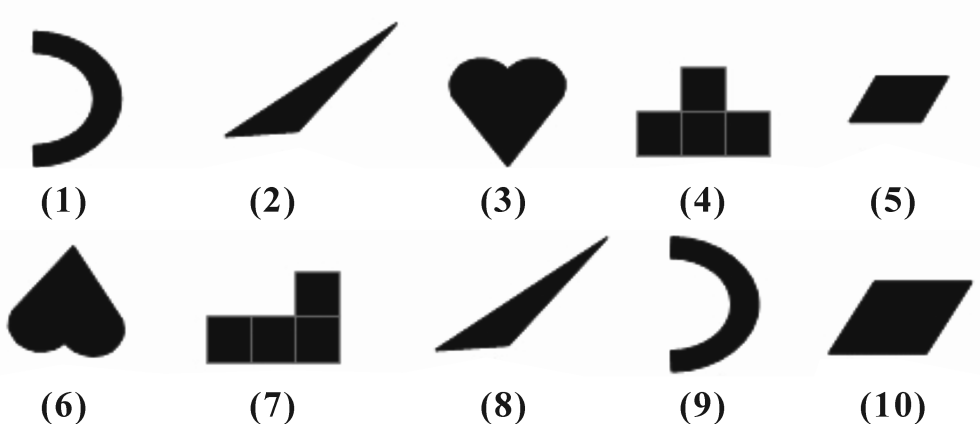
師:圖中 4) 和 7)、5) 和 10) 為什麼不全等?

生:它們不能重合.

師:它們有什麼相同點、又有什麼不同點嗎?

生:4) 與 7) 面積相同、形狀不同. 5) 與 10) 形狀相同、大小不同.

**全等圖形的性質:**全等圖形的形狀和大小都相同



### (二) 全等三角形的定義和性質:

師:屏幕上的兩個三角形也能互相重合,它們應該叫什麼呢?



**定義:**能夠完全重合的兩個三角形稱為全等三角形.

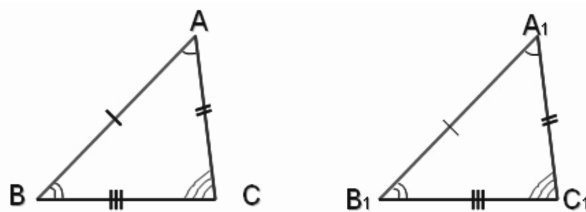
記做  $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ .

能夠重合的頂點稱為對應頂點.

能夠重合的邊稱為對應邊.

能夠重合的角稱為對應角.

(動畫演示,閃爍,平移後重合)



師:全等三角形的對應邊、對應角有什麼關係?(動畫演示,重合、相等)

生:它們都重合了,都相等.

**全等三角形的性質:**全等三角形的對應邊相等,對應角相等.

師:全等三角形的性質應用時,以全等為條件,邊等和角等為結論.

**練習一:**

1、(1). 已知:如圖 1,  $\triangle OAD$  與  $\triangle OBC$  全等,

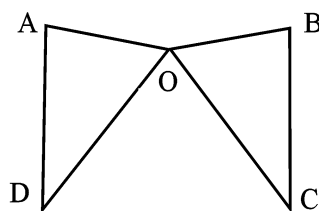
請用數學符號表示為: \_\_\_\_\_;

(2). 找出對應邊,它們有什麼關係?(口答)

對應邊: \_\_\_\_\_;

(3). 找出對應角,它們有什麼關係?(口答)

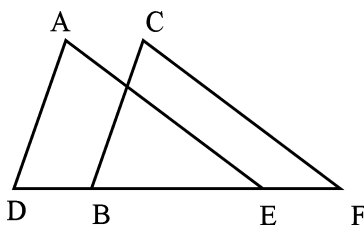
對應角: \_\_\_\_\_.



2、如圖 2, 已知  $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ ,

(1) 若  $BC = 6$ , 則  $AD =$  \_\_\_\_\_;

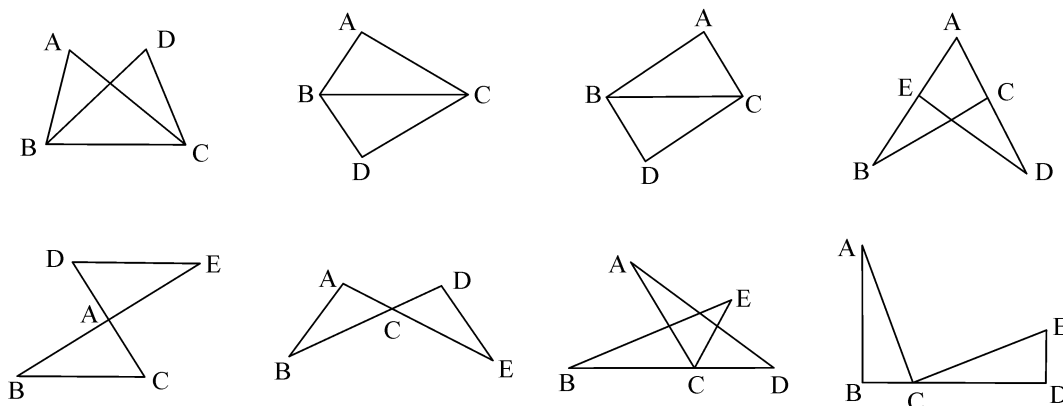
(2) 若  $\angle AED = 32$  度, 則  $\angle CFB =$  \_\_\_\_\_.



**(三) 動手操作:**

師:在練習中出現的兩個圖形,是由兩個全等的三角形擺放不同的位置. 你能用手中的兩個全等的三角形紙板擺出可能的位置嗎?看看哪個小組擺得多?在擺放的過程 中感受對應邊、對應角的位置.

學生動手操作,小組合作,在黑板上演示成果



師:大家擺出了這麼多的位置,你的三角形都做了怎樣的變化了呢?

這些的位置,脫離不開三種變化.(動畫演示)

平移                  旋轉                  翻轉

師:這些全等三角形你能找到它的對應關係嗎?

生:略(引導學生觀察圖形特徵,總結規律).

師:前三個圖形它們有什麼特點.

生:它們都有公共的邊.

師:有公共邊的全等三角形,找對應關係時有什麼小竅門?

生:公共邊就是對應邊.

師:第四個圖形呢?

生:有公共角,公共角是對應角.

師:第五、六個圖形呢?

生:有對頂角,它們相等,是對應角.

師:最後兩個圖形呢?好像沒有公共角,也沒有公共邊,更沒有對應角,它們又有什麼特點呢?

生:我能看出最後第二個圖中  $AD$  與  $BE$  是對應邊.

師:怎麼看出來的呢?

生:它們最長,最長邊與最長邊是對應邊.

師:非常好.

師:最後一個圖呢?可以看對應邊,還可以看對應角.

生:最大角與最大角是對應角.

總結:尋找對應元素的規律:

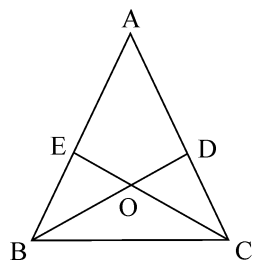
- (1) 有公共邊的,公共邊是對應邊;
- (2) 有公共角的,公共角是對應角;
- (3) 有對頂角的,對頂角是對應角;
- (4) 兩個全等三角形最大的邊是對應邊,最小的邊是對應邊;
- (5) 兩個全等三角形最大的角是對應角,最小的角是對應角.

練習二:等腰  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC$ . 你能找出圖形中的全等三角形嗎?

$\triangle ADB$  與  $\triangle AEC$  (有公共角).

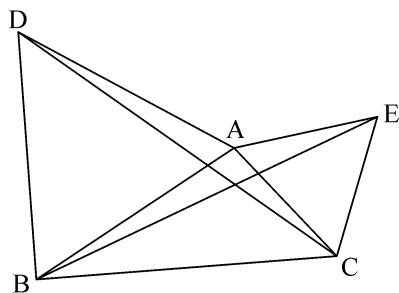
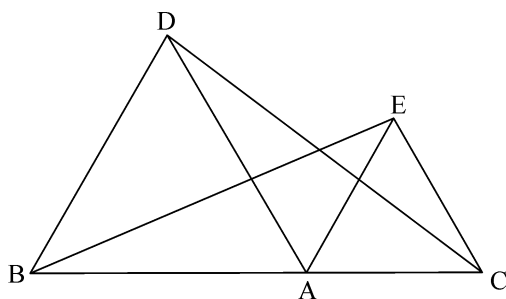
$\triangle EBC$  與  $\triangle DCB$  (有公共邊).

$\triangle BEC$  與  $\triangle CDB$  (有對頂角).

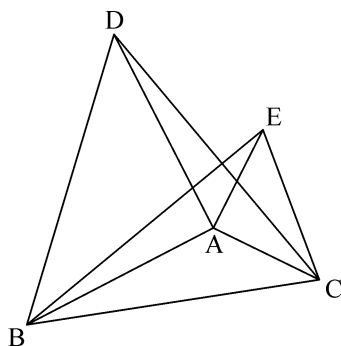
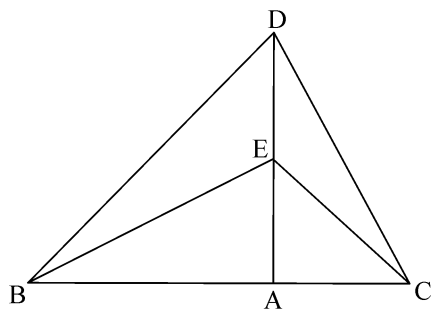


### III 歸納總結,拓展.

[例] 點  $A$  在綫段  $BC$  上,分別以  $AB$ 、 $AC$  為邊向同側作等邊  $\triangle ABD$  與等邊  $\triangle ACE$ ,連  $DC$ 、 $BE$  你能找出圖中的全等三角形嗎?(用字母能表示的三角形)



〔變式一〕以  $\triangle ABC$  的邊  $AB$ 、 $AC$  為邊向同側作等邊  $\triangle ABD$  與等邊  $\triangle ACE$ ，連  $DC$ 、 $BE$  你能找出圖中的全等三角形嗎？



〔變式二〕點  $A$  在綫段  $BC$  上，分別以  $AB$ 、 $AC$  為邊向同側作等腰直角  $\triangle ABD$  與等腰直角  $\triangle ACE$ ，連  $DC$ 、 $BE$  你能找出圖中的全等三角形嗎？

〔變式三〕以  $\triangle ABC$  的邊  $AB$ 、 $AC$  為邊向同側作等腰直角  $\triangle ABD$  與等腰直角  $\triangle ACE$ ，連  $DC$ 、 $BE$  你能找出圖中的全等三角形嗎？

#### IV 小結.

師：通過這節課的學習，同學們有什麼感受呢？

師：很高興同大家一起度過這節課的時光，感受到了同學們都有一雙善於發現的眼睛，大家一定要睜大你的慧眼，還有很多的數學奧秘等待大家去發現！

# 圖形中陰影面積的幾種求法

沈陽市第七中學 宋陽

**教學內容:**關於陰影面積求法的專題復習課.

**教學目的:**1、通過典型例題的講解,歸納出求陰影面積的方法.

2、培養學生總結歸納的能力,滲透轉化的數學思想.

3、通過小組合作,培養學生的團隊意識.

**教學重點:**陰影面積求法的歸納及應用.

**教學難點:**對和差法,割補法,等積法的理解.對數學思想的滲透.

**教學準備:**ppt 課件.

**教學過程:**

## 一. 預設引例,導入新知

### (一) 提出問題,引發思考

師:今天和同學們一起研討一數學專題知識,希望聰明的你們有更多的收穫.同學們看黑板,老師畫幾個圖形:



這幾個幾何圖形相信同學們都會認識,並知道它們面積的求法.

生:能.

師:那同學們看,如果我們取正方形的中心  $O$  點,過  $O$  點做互相垂直的兩條直綫,同學們能知道這個陰影面積的求法嗎?

### (二) 揭示課題

師:這節課我們共同探討《圖形中陰影面積的幾種求法》

## 二. 探究新知

### (一) 探究方法

師:同學們請看大屏幕(出示課件).

如圖：有一塊長 9 米，寬 6 米的長方形空地，中間準備建一條寬 2 米的小路，其餘空地植草皮，則草地的面積( )。



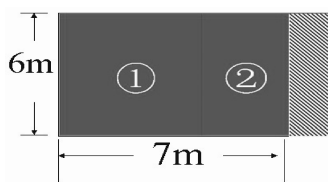
生：讀題。

師：這個圖形中陰影面積怎麼求呢？

生：用大矩形的面積減去修建小路的面積。

師：老師採用了這種方法(出示課件)。

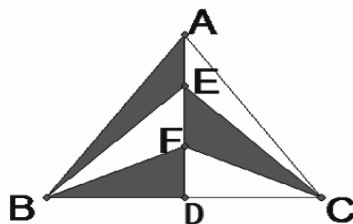
如圖：有一塊長 9 米，寬 6 米的長方形空地，中間準備建一條寬 2 米的小路，其餘空地植草皮，則草地的面積( )。



這種方法是把分散的面積整合到一起，組成規則的圖形，易求面積。我們把這種方法歸納為“**平移法**”。

師：下一題(出示課件)。

如圖，在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，點  $E$ 、 $F$  是中線  $AD$  上的兩點，則圖中陰影部分的面積是( )。



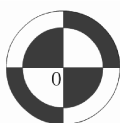
師：怎麼計算面積好呢？

生：把所求分散的幾個三角形整合在一起恰好是大三角形面積的一半。

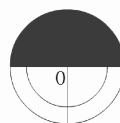
師：非常好，這位同學很聰明！這個同學的方法我們可以歸納為“**軸對稱法**”。

師：我們看下一題(出示課件)。

下圖中大圓的直徑是 8 厘米，求圓中陰影部分的面積( )。



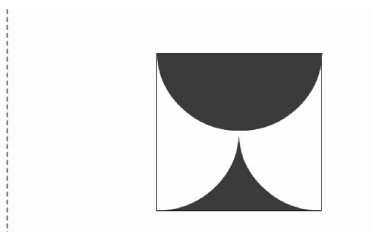
下圖中大圓的直徑是 8 厘米，求圓中陰影部分的面積( )。



生:我想把分散的陰影整合到一起之後面積恰好是圓形的一半.

師:這位同學回答的很好,這種方法是通過旋轉得到的,所以我們歸納它為“旋轉法”.

師:同學都很聰明,那你們看看下一個題應該用什麼方法好呢?圖中正方形的邊長是4厘米.圖中塗色部分的面積( ).



師:同學們在小組內討論一下,看看誰總結的方法好.

生1:我們小組覺得用“旋轉法”好,通過旋轉把不規則的圖形轉化成規則的圖形.

生2:我認為生1說的不對,因為旋轉法應該有能旋轉的部分圖形,而這道題沒有.

師:同學們說的都有道理.老師通過這道題給大家介紹一個新的方法,同學們請看:

圖中正方形的邊長是4厘米.圖中  
塗色部分的面積( ).

圖中正方形的邊長是4厘米.圖中  
塗色部分的面積( ).



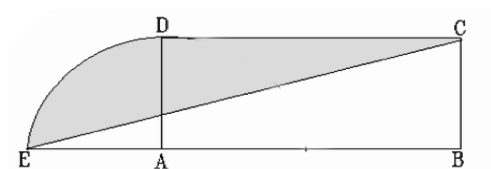
首先找到正方形的對稱軸把陰影分開,然後再把分開的陰影補到另外的位置使其成為規則圖形,我們把這種方法歸納為“割補法”.

師:我們總結幾種方法了?

生:四種方法.

師:我們看下一道題能用以上的方法求嗎?(出示課件)

在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 4\text{cm}$ ,且 $AB = 8\text{cm}$ ,以點 $A$ 為圓心、 $AD$ 長為半徑畫圓,交 $BA$ 延長線於點 $E$ .求陰影的面積.



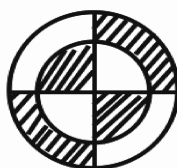
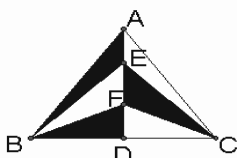
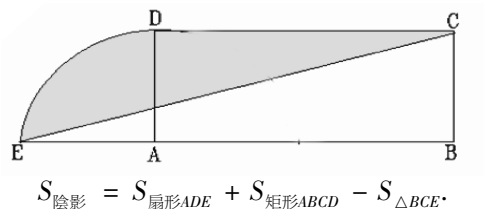
生1:能.

生2:不能.

師:大家的意見不太一致,我們小組內研討一下(5分鐘)。

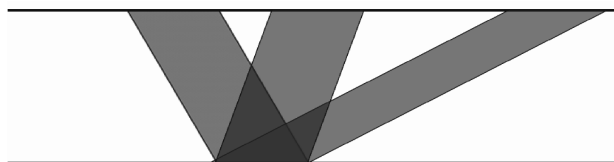
師:這道題和我們求過的幾道題中,最明顯的區別是:這個圖形的陰影面積沒有分散,不需要整合在一起,這說明剛剛總結的4個方法不適用,所以呢老師介紹給大家一個新的方法,我們不改變陰影的位置,可以把陰影部分的面積用規則圖形的和或差的形式表現出來,這種方法歸納成“和差法”。(出示課件)

在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 4\text{cm}$ ,且 $AB = 8\text{cm}$ ,以點 $A$ 為圓心、 $AD$ 長為半徑畫圓,交 $BA$ 延長線於點 $E$ 。求陰影的面積。



師:請看下一題(出示課件)。

如圖,兩條並行線之間有三個平行四邊形,其中一個平行四邊形的面積是5,三個面積和為( )。



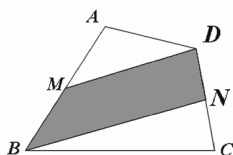
平行綫之間有三個平行四邊形,其中一個的面積是5,則三個的面積和為多少呢?

生:和為15. 因為這幾個平行四邊形的面積相等。

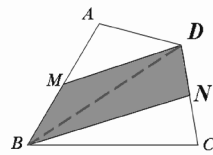
師:非常好,不難看出這三個平行四邊形同底等高,面積相等。

師:那下一道題呢?(出示課件)。

如圖,在四邊形 $ABCD$ 中, $M$ 是 $AB$ 的中點, $N$ 是 $CD$ 的中點。如果四邊形 $ABCD$ 的面積是20,那麼 $BNDM$ 的面積是多少( )。



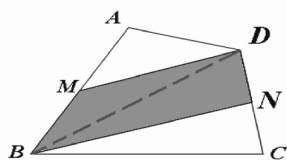
如圖,在四邊形 $ABCD$ 中, $M$ 是 $AB$ 的中點, $N$ 是 $CD$ 的中點。如果四邊形 $ABCD$ 的面積是20,那麼 $BNDM$ 的面積是多少( )。



生:連接 $BD$ ,分成的三角形 $AMD$ 和三角形 $BMD$ 為等底同高,面積相等的兩個三角形。三角形 $BDN$ 和三角形 $BCN$ 也是等底同高,所以面積為大四邊形面積的一半。

師:太聰明了,回答的特別好!

如圖,在四邊形  $ABCD$  中, $M$  是  $AB$  的中點, $N$  是  $CD$  的中點. 如果四邊形  $ABCD$  的面積是 20,那麼  $BNDM$  的面積是多少( ).

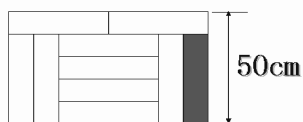


等底同高,面積相等

這種方法常常歸納為“等積法”.

師:同學們都很聰明啊,大家看看這道題你會求嗎?(出示課件)

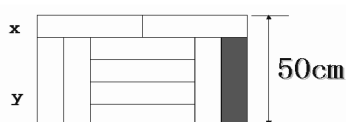
如圖,寬為  $50\text{cm}$  的矩形圖案由 10 個全等的小長方形拼成,其中壹個小長方形的面積為( ).



同底等高,面積相等

如圖,寬為  $50\text{cm}$  的矩形圖案由 10 個全等的小長方形拼成,其中壹個小長方形的面積為( ).

$$\text{解: } \begin{cases} x + y = 50, \\ 4x = y, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = 10, \\ y = 40. \end{cases}$$



師:這道題的陰影很有規則,是一個小矩形的面積,所以呢我們要把幾何條件轉化成代數條件來解決問題,用“方程的思想”來解決就更方便了.

師:我們一共歸納幾種方法了?

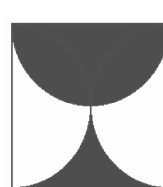
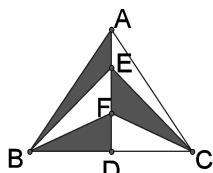
生:齊答!共有 7 種方法.

師:能用面積公式直接求的的方法我們就歸為第八種方法吧.

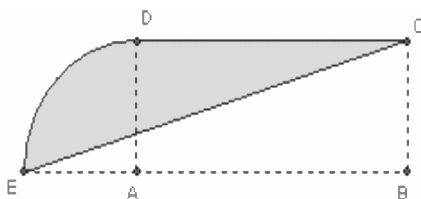
## (二) 總結提煉

師:通過以上的學習我們再來回顧一下這些方法.

師:下面幾個圖形由於陰影面積比較分散,所以我們可以采用平移,軸對稱,旋轉,割補等方法將分散的面積整合在一起組成規則的幾何圖形,進而求解.

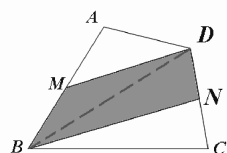
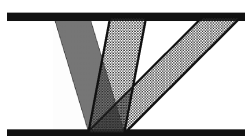


師:下面這個圖形中陰影面積不是分散的,所以我們采用規則圖形面積的和或差來表示.

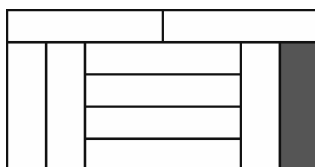




下面這兩個圖形的面積可以轉化成與它們面積相等的圖形的面積.



下面這個圖形是把幾何條件轉化成代數的條件,進而用方程的思想來解決問題.



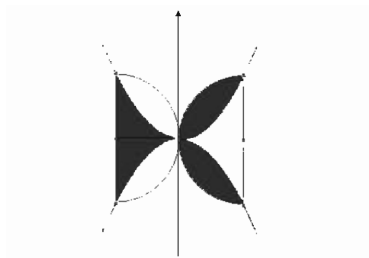
師:所求陰影面積如果不能直接求出,我們需要把所求面積轉化成規則的,能求的面積來解決,這裏蘊含了一個非常重要的數學思想——“轉化”的數學思想.

### 三. 深化新知 拓展練習

師:相信同學對以上方法已經有所掌握,下面我們來比比看,看哪位同學回答的快.

師:出示第一個練習.

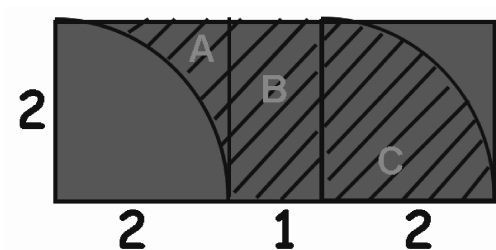
如圖,半圓  $A$  和半圓  $B$  均與  $y$  軸相切於  $O$ ,其直徑  $CD$ 、 $EF$  均和  $x$  軸垂直,以  $O$  為頂點的兩條拋物線分別經過點  $C$ 、 $E$  和點  $D$ 、 $F$ ,則圖中陰影部分的面積是( ).



生:“軸對稱法”.

師:出示第二個練習:

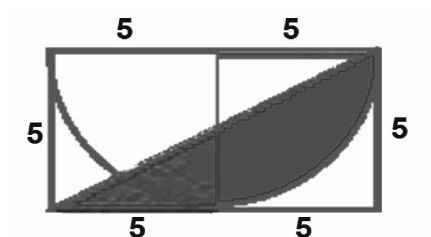
求下圖中陰影部分的面積.



生:“平移法”.

師:出示第三個練習

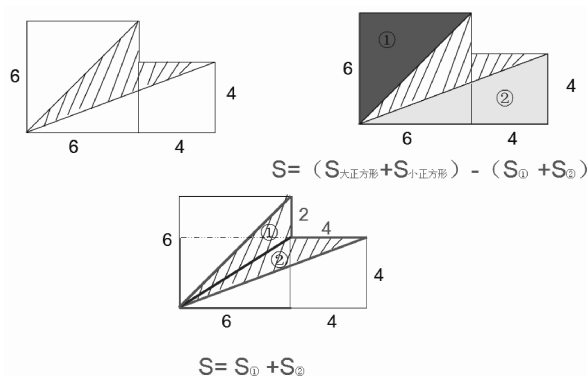
求下圖中陰影部分的面積.



生:“旋轉法”.

師:出示第四個練習

求下圖中陰影部分的面積(單位:分米).



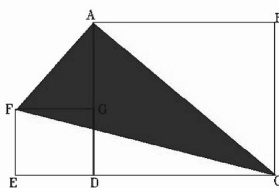
生 1:“和差法”.

生 2:“割補法”也可以.

師:看來同學都掌握的不錯.老師很高興.

師:同學們動動腦筋看看下面這道題用什麼方法最佳?

正方形  $ABCD$  的邊長為 2, 小正方形  $DEFG$  的邊長未知, 求圖中陰影部分面積.



生 1:“和差法”.

師:仔細看看如果用“和差法”能表示成哪個規則圖形的和或差呢?你表示的規則圖形的面積可求嗎?

生 1:不能求,和差法好像不行!

師:那還有別的方法嗎?

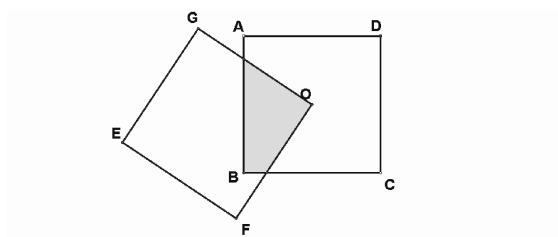
生 2:連接  $FD$ , 用“等積法”來求.

師:非常好!

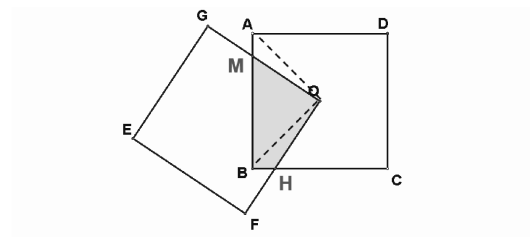
師:通過這節課的學習相信聰明的你們已經掌握了上述的方法,希望大家在今後的學習中注意歸納,總結,大家一定會有更多的方法解決這類問題.

師:同學們來解決一下剛上課時我們提出的這個問題吧?

已知,如圖邊長為 1 的正方形  $EFOG$  繞與之邊長相等的正方形  $ABCD$  的對角線交點  $O$  旋轉任意角度,求圖中重疊部分的面積( ).



已知,如圖邊長為 1 的正方形  $EFOG$  繞與之邊長相等的正方形  $ABCD$  的對角線交點  $O$  旋轉任意角度,求圖中重疊部分的面積( ).



生 1:用“割補法”. 連接  $OA, OB$  則三角形  $OAM$  和三角形  $OBH$  全等,所以陰影面積可以轉化成三角形  $OAB$  的面積.

師:非常好.

#### 四. 回顧整理 反思提昇

師:同學們通過這節課的學習你有哪些收穫?

師:相信同學們已經掌握了上面歸納的幾種方法了,希望同學們在今後的學習中多注意歸納總結,看看有沒有更好的方法解決這類問題.

板書設計:

#### 圖形中陰影面積的幾種求法

- 一. 平移法.
- 二. 軸對稱法.
- 三. 旋轉法.
- 四. 割補法.
- 五. 和差法.
- 六. 等積法.
- 七. 代數法.
- 八. 直接法.

“轉化”的數學思想.

## 2015“希望杯”全國數學邀請賽（中學第二十六屆）

### 報名人數統計表

| 學校名稱          | 初一  | 初二  | 初三  | 高一  | 高二  | 合計   | 聯絡人 |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| 澳門大學附屬應用學校 *  | 4   | 5   | 4   | 0   | 0   | 13   | 曾慧樂 |
| 培華中學 *        | 7   | 6   | 15  | 10  | 10  | 48   | 劉冠靈 |
| 聖保祿學校 *       | 40  | 41  | 45  | 0   | 0   | 126  | 伍穎智 |
| 粵華中學 *        | 30  | 30  | 30  | 30  | 30  | 150  | 周駿業 |
| 榮農子弟學校 *      | 45  | 30  | 30  | 30  | 30  | 165  | 陳容貴 |
| 氹仔坊眾學校(中學部) * | 10  | 20  | 15  | 20  | 15  | 80   | 馮影華 |
| 鏡平學校 *        | 50  | 50  | 50  | 40  | 40  | 230  | 劉志豪 |
| 培正中學 *        | 63  | 120 | 155 | 153 | 87  | 578  | 胡俊明 |
| 澳門坊眾學校 *      | 25  | 25  | 25  | 25  | 25  | 125  | 黃 剛 |
| 陳瑞祺永援中學 *     | 0   | 11  | 0   | 13  | 0   | 24   | 陳鳳陽 |
| 培道中學 *        | 40  | 50  | 50  | 60  | 60  | 260  | 金 鑫 |
| 聖公會(澳門)蔡高中學 * | 24  | 18  | 19  | 14  | 5   | 80   | 徐文健 |
| 敎業中學 *        | 10  | 20  | 10  | 15  | 10  | 65   | 吳伯成 |
| 濠江中學 *        | 44  | 48  | 52  | 52  | 54  | 250  | 李麗梅 |
| 同善堂中學 *       | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 100  | 樑文亮 |
| 勞工子弟學校 *      | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 250  | 文智和 |
| 高美士中葡中學 *     | 11  | 14  | 13  | 10  | 21  | 69   | 區兆添 |
| 浸信中學 *        | 30  | 30  | 30  | 30  | 30  | 150  | 蔡九錫 |
| 廣大中學 *        | 15  | 15  | 13  | 8   | 1   | 52   | 樑翠瓊 |
| 中葡職業技術學校 *    | 6   | 9   | 3   | 12  | 8   | 38   | 蕭仁信 |
| 新華學校 *        | 10  | 10  | 0   | 0   | 0   | 20   | 楊丹平 |
| 聖若瑟教區中學(第四校)  | 0   | 0   | 30  | 30  | 30  | 90   | 劉淑華 |
| 濠江中學附屬英才學校    | 25  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0    | 李守球 |
| 聖玫瑰學校         | 0   | 2   | 0   | 0   | 0   | 2    | 林鬆孝 |
| 合計            | 559 | 624 | 659 | 622 | 526 | 2990 |     |

## 2015“希望杯”全國數學邀請賽（小學第十三屆） 報名人數統計表

| 學校名稱         | 小四  | 小五  | 小六  | 合計   | 聯絡人 |
|--------------|-----|-----|-----|------|-----|
| 濠江中學附屬英才學校   | 25  | 25  | 0   | 50   | 黃雙願 |
| 培道中學（小學部）    | 32  | 32  | 32  | 96   | 樑燁娟 |
| 培道中學氹仔小學分校   | 20  | 0   | 0   | 20   | 吳瑞如 |
| 敎業中學         | 15  | 15  | 20  | 50   | 鄭婉珊 |
| 榮農子弟學校       | 40  | 40  | 40  | 120  | 陳碧瑜 |
| 氹仔坊眾學校       | 8   | 8   | 12  | 28   | 呂杏妍 |
| 鏡平學校（小學部）    | 40  | 40  | 40  | 120  | 劉志豪 |
| 培正中學（小學部）*   | 53  | 91  | 78  | 222  | 馮燕嫻 |
| 聖若瑟教區中學第五校   | 16  | 16  | 16  | 48   | 盛秀瑛 |
| 澳門坊眾學校（小學部）* | 16  | 16  | 16  | 48   | 黃 剛 |
| 陳瑞祺永援中學*     | 16  | 16  | 0   | 32   | 黃慧珠 |
| 慈幼中學*        | 12  | 12  | 12  | 36   | 樑艷華 |
| 濠江中學附屬小學*    | 40  | 40  | 40  | 120  | 劉明藝 |
| 同善堂中學（小學部）   | 16  | 16  | 16  | 48   | 郭亞燕 |
| 勞工子弟學校（小學部）* | 40  | 40  | 40  | 120  | 江敏育 |
| 澳門浸信中學（小學部）* | 10  | 10  | 10  | 30   | 鄭鎋堅 |
| 澳門大學附屬應用學校*  | 6   | 7   | 7   | 20   | 吳 芬 |
| 聖玫瑰學校        | 0   | 3   | 1   | 4    | 林鬆孝 |
| 合計           | 405 | 427 | 380 | 1212 |     |

# 澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門竹室正街1號富華樓2樓A室

電話:853-28965253, 853-66878553 傳真:853-28965253

E-mail: macaumath@yahoo.com.hk, inwmacau@yahoo.com.hk

Website: <http://www.mathsmo.com/>

## 會務活動紀錄

### 2002 年

6 月 17 日 在氹仔海島公證署辦理本會注冊手續。

### 2003 年

6 月 7 日 舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會。

12 月 13、14 日 舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課。

12 月 《澳門數學教育》創刊號出版。

### 2004 年

4 月 17 日 舉辦“DM\_Lab 和動態數學教學”講座。

9 月 30 日 赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南苑小學。

10 月 9、10 日 舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課。

### 2005 年

3 月 24 - 28 日 赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。

4 月 16 日 與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會。

11 月 26、27 日 舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課。

12 月 20 - 28 日 前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

### 2006 年

3 月 4 日 舉辦“因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會。

- 4 月 14、15 日 赴廣東省河源市第二小學和河源市中學觀課。  
6 月 25 – 29 日 前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。  
12 月 9 – 10 日 舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”。

## 2007 年

- 4 月 28、29 日 與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”。  
7 月 4、5 日 與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學：一個國際視角”及“有效數學教學實務：美國的經驗”講座。  
7 月 30 日至  
8 月 3 日 訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。  
9 月 1 日 舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座。

## 2008 年

- 11 月 1 日 舉辦“小學數學專家講座”。  
11 月 22 日 舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議。

## 2009 年

- 5 月 29 日、30 日 前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽 (ARML)，榮獲國際組第一名。  
8 月 15 日 ~ 20 日 訪問內蒙古包頭市鐵路二中。  
11 月 14 日 舉辦“數學教學的有效性與開放性”研討大會及示範課。  
12 月 5 日、6 日 舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會。  
(慶祝祖國成立 60 週年,澳門回歸 10 週年,本會成立 5 週年活動)

## 2010 年

- 6 月 成立“澳門數學奧林匹克學會”，政府憲報刊登該會章程。  
11 月 26 日、27 日 組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。  
1 月 18 日 華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

## 2011 年

- 1 月 28 日 「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。  
9 月 27 日、28 日 與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”。

## 2012 年

- 6 月 9 日 舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課。
- 8 月 1 - 6 日 赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。
- 11 月 3 - 4 日 舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”。
- 11 月 3 日晚上 舉行慶祝本會成立十週年晚宴，十週年成果展。

## 2013 年

- 4 月 6 日 舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽。
- 4 月 14 日 進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。
- 4 月 16 日 名譽會長陳明金先生宴請本會，表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。
- 5 月 11 日 舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”。
- 6 月 1 日 赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽。
- 5 月 31、6 月 1 日 前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML)，澳門隊第二。
- 6 月 15 - 19 日 舉辦數學實驗——統計與概率工作坊。
- 7 月 10 日 澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。
- 7 月 18 日 舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨 (ARML) 美國高中數學競賽成果匯報會。
- 8 月 1 - 7 日 赴哈爾濱、雞西中、小學進行學術交流。
- 11 月 16 - 17 日 與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會。
- 12 月 7 - 9 日 舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級證書培訓班」。
- 12 月 《澳門數學教育》第十一期出版。

## 2014 年

- 1 月 11 日 於濠江中學舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會，邀請上海市楊浦區教師進修學院徐方瞿專家為本會幹事進行基本使用培訓。
- 4 月 3 日 拜訪澳門基金會，獲澳門基金會行政委員會主席吳志良、資助暨合作廳廳長黃棣樂等人接見。
- 4 月 13 日 於浸信中學進行中學第二十五屆、小學第十二屆“希望杯”全國數學邀請賽澳門地區第二試決賽。本澳共有 3902 名學生報名，其中中學 2687 人，小學 1215 人。
- 4 月 15 日 拜訪澳門教育暨青年局，獲黃健武廳長接見。
- 4 月 17 日至 21 日 赴臺灣澎湖、高雄參訪、學習暨觀光交流活動。



- 4 月 26 日 於澳門濠江中學禮堂舉辦“史豐收速算法”介紹會，由史豐收速算法推廣中心主任史豐寶親臨會場，並帶領小朋友作現場示範。
- 5 月 30 - 31 日 組織本澳 15 名數學優秀學生前往美國拉斯維加斯內華達大學拉斯維加斯校區(UNLV)參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML)，澳門隊領隊、教練汪甄南、施振雄、劉淑華、魏均僑，隊員包括(濠江)伍培全、洪文浩、譚詠霖、黃亮杰、談皓、袁永華、黃俊賢、(教業)蕭浩樑、(鏡平)方偉權、(勞校)鄒嘉俊、何安、(培正)周昊天、區智傑、鄧楚灝、(聖若瑟)陳永強，比賽完畢後，參觀太空穿梭機科技館，遊覽大峽谷和環球片場等景點。這次中國隊獲國際組總分第一，澳門隊第二，為澳門學界爭光。
- 6 月 14 日 於高美士中葡中學多功能廳舉行「領道數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動，邀請瀋陽七中袁桂紅副校長作如何領道數學科組工作經驗介紹講座和進行教學展示課：  
張迎老師主講初三《圖形的全等》，勞工子弟學校學生參與。  
宋陽老師主講初一《圖形中陰影面積的求法》，培道中學學生參與。
- 7 月 11 日 於培正中學舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班，邀請上海市楊浦區教師進修學院徐方瞿專家培訓本澳 43 名老師使用幾何王軟件。
- 7 月 12 日 於濠江中學禮堂舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級證書頒發(中國奧林匹克數學委員會發)頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果匯報會。澳門基金會合作處代處長張健美小姐、中聯辦文化教育教育部助理石磊先生和教育暨青年局黃逸恆處長為獲得者及其教練員頒發獎牌和證書。
- 8 月 10 - 16 日 本會派濠江中學談皓和粵華中學黃學良前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團。
- 10 月 18 日 於培道中學舉辦“熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課”，邀請上海華東師範大學李士錡教授主講熟能生巧數學觀點講座和上海控江高級中學數學特級教師曾國光老師進行教學展示課，培道中學學生參與。
- 11 月 22 - 23、  
29 - 30 日 於培道中學舉辦“史豐收速算法”道師培訓班。
- 12 月 6 日、7 日 於高美士中葡中學禮堂舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽(澳門賽區)。  
進入決賽老師：  
濠江中學小學部郭倩瑩老師，課題：小二〈認識時間〉

培正中學小學部楊玉婷、邵敏老師，課題：小六〈圓的認識〉

濠江中學小學部蘇淑玲老師，課題：小五〈平行四邊形的面積〉

濠江中學小學部潘錦柳老師，課題：小一〈6 至 10 的認識和加減法〉

培道中學氹仔小學分校譚健新老師，課題：小三〈認識小數〉

評委：方運加教授（首都師範大學數學係）、邱學華教授（嘗試教學理論研究會理事長）、黃建弘（上海師資培訓中心實驗基地主任）、蔡兆明主任（本會副理事長）。

評選結果：一等獎：楊玉婷、邵敏、蘇淑玲、譚健新老師

二等獎：郭倩瑩、潘錦柳老師

12 月

《澳門數學教育》第十二期出版。